

Metody probabilistyki i statystyki

Typy zadań na kolokwium

rok akademicki 2018/2019, semestr letni

1. Znaleźć przestrzeń zdarzeń elementarnych i obliczyć prawdopodobieństwo danego zdarzenia w klasycznym modelu prawdopodobieństwa (niezbędna znajomość następujących pojęć kombinatorycznych: kombinacja bez powtórzeń, kombinacja z powtórzeniami, wariacja bez powtórzeń, wariacja z powtórzeniami, permutacja [zbioru] bez powtórzeń, permutacja [multi-zbioru] z powtórzeniami).

Przykład:

Z talii brydżowej, liczącej sobie 52 karty, losowanych jest 6 kart. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowano karete i parę?

2. Znaleźć przestrzeń zdarzeń elementarnych i obliczyć prawdopodobieństwo danego zdarzenia w geometrycznym modelu prawdopodobieństwa.

Przykład:

Na płaszczyźnie jest nieskończenie wiele prostych równoległych, w odległościach na przemian 2 i 10 cm. Na płaszczyznę rzucono monetę o średnicy 6 cm. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta nie przetnie żadnej z prostych?

3. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia w nieklasycznym modelu prawdopodobieństwa (niezbędna znajomość następujących pojęć: prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa, schemat Bernoulliego, niezależność zdarzeń).

Przykład:

Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy wielokrotnym rzucaniu parą kostek sześciennych suma oczek 8 wypadnie przed sumą oczek 7?

Wskazówka: Potraktuj serię rzutów jak grę pomiędzy graczami A i B, w której A wygrywa, jeśli w danym rzucie suma oczek wyniesie 8, zaś gracz B – jeśli suma oczek wyniesie 7. W momencie, w którym któraś ze wspomnianych wyżej sum zostanie wyrzucona, gra się kończy. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej dla każdego z graczy.

4. Znaleźć rozkład danej zmiennej losowej dyskretnej i obliczyć jej parametry: wartość oczekiwaną i wariancję.

Przykład:

Zmienna losowa X ma rozkład prawdopodobieństwa podany w tabeli:

x_i	-2	-1	0	2	3
$P(X = x_i)$	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

- a) Obliczyć EX oraz D^2X .

- b) Podać rozkład zmiennej losowej $Y = X^2 - 1$ oraz korzystając z niego, obliczyć $\mathbb{E}Y$ i \mathbb{D}^2Y .
- c) Obliczyć prawdopodobieństwo $P(-1 < X \leq 2)$ oraz $P(-1 < Y \leq 3)$.
5. Znaleźć rozkład danej zmiennej losowej ciągłej, znaleźć jej gęstość (o ile istnieje) i obliczyć parametry: wartość oczekiwaną i wariancję (niezbędna znajomość rozkładów: jednostajnego, wykładniczego).

Przykład: Niech zmienna losowa X ma gęstość wyrażającą się wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} A \cos x, & \text{dla } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & \text{dla } x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Obliczyć:

- a) parametr A ,
- b) $P\left(-\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{4}\right)$,
- c) $\mathbb{E}X$,
- d) \mathbb{D}^2X .