Marek Nowak
Katedra Logiki i Metodologii Nauk
Uniwersytetu Łódzkiego

SYTUACJE OPISYWANE ZDANIAMI PIERWSZEGO RZĘDU

Temat jest rozwinięciem ustaleń dotyczących reprezentacji formalnej sądów wyrażonych zdaniami, których schematami są formuły standardowego lub modalnego języka zdaniowego, publikowanych w następujących pracach:

D. Vanderveken, *What Is a Proposition?*,Cahiers d'epistemologie Universite du Quebec a Montreal no 9103(1991)

D. Vanderveken, M. Nowak, *An Algebraic Analysis of the Logical Form of Propositions*, Logique et Analyse 141-142(1993) 135-148

M. Nowak, D. Vanderveken, *A complete minimal logic of the propositional contents of thought*, Studia Logica 54(1995) 391-410

M. Nowak, *Formalna reprezentacja pojęcia sądu (dla zastosowań w teorii aktów mowy)*, Wydawnictwo UŁ , Łódź 2003

Zasadnicza idea owej reprezentacji jest następująca: rozważmy standardowy język zdaniowy ze spójnikami $\wedge, \neg$ (pozostałe spójniki są definiowane). Z każdą zmienną zdaniową p stowarzyszony jest tzw. *sąd atomowy* $\|p\|$. Np. gdy p reprezentuje zdanie: $1 \leq 3$, to sąd atomowy $\|p\|$ jest parą uprządkowaną, której pierwszym elementem jest tzw. *zawartość* - tu składają się na nią liczby $1, 3$ oraz relacja $\leq$, zaś drugim elementem jest wartość logiczna tego zdania.

Sąd wyrażony zdaniem, którego schematem jest formuła języka zdaniowego α jest reprezentowany w postaci pary uporządkowanej $|\alpha|$, określanej ze względu na typ tej formuły następująco:

$|p| = < \{\|p\|\}, \{f \in \{0,1\}^{At} : f(\|p\|) = 1\} >$, gdzie $At = \{\|p\| : p \in VarS\}$.

$|\beta \wedge \gamma| = < pr_1(|\beta|) \cup pr_1(|\gamma|), pr_2(|\beta|) \cap pr_2(|\gamma|) >$, (dla dowolnej pary uporządkowanej $< a, b >$, $pr_1(< a, b >) = a$ oraz $pr_2(< a, b >) = b$),

$|\neg\beta| = < pr_1(|\beta|), \{0,1\}^{At} - pr_2(|\beta|) >$.

W efekcie otrzymuje się następujące kryterium identyczności sądów:

$$|\alpha| = |\beta| \text{ wtw } \models \alpha \leftrightarrow \beta \text{ oraz } V(\alpha) = V(\beta).$$

Rozważmy język pierwszego rzędu z identycznością $\mathcal{L}$ określony przez zbiór stałych indywiduowych $\{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$ oraz symboli relacyjnych $\{P_1, P_2, \ldots, P_q\}$ dowolnej argumentowości. Ostatni zbiór rozszerzamy o predykaty: $-P_i, i = 1, \ldots, q$ takie, że dla dowolnego i, jeżeli interpretantem predykatu P_i w danej interpretacji $\mathcal{M}$ dla języka $\mathcal{L}$ jest relacja $P_i^{\mathcal{M}}$, to $(-P_i)^{\mathcal{M}} = D_{\mathcal{M}}^n - P_i^{\mathcal{M}}$, gdzie $D_{\mathcal{M}}$ jest dziedziną interpretacji $\mathcal{M}$ oraz n jest liczbą argumentów predykatu P_i.

Niech $Var = \{x_1, x_2, \ldots\}$ będzie zbiorem wszystkich zmiennych indywiduowych języka $\mathcal{L}$. Dla danej interpretacji $\mathcal{M} = (D_{\mathcal{M}}, c_1^{\mathcal{M}}, \ldots, c_p^{\mathcal{M}}, P_1^{\mathcal{M}}, \ldots, P_q^{\mathcal{M}})$ dla języka $\mathcal{L}$ oraz formuły $\alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, gdzie $x_{i_1} < \ldots < x_{i_n}$, gdzie $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ są wszystkimi jej zmiennymi wolnymi, niech $\alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})^{\mathcal{M}}$ będzie n-argumentową relacją zdefiniowaną na dziedzinie D w naturalny sposób: dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in D$,

$(a_1, \ldots, a_n) \in \alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})^{\mathcal{M}}$ wtw
$\mathcal{M} \models \alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})[(a_1, \ldots, a_n)]$.

W przypadku, gdy α jest zdaniem kładziemy: $\alpha^{\mathcal{M}} = 1$, gdy α jest prawdziwa w interpretacji $\mathcal{M}$, oraz $\alpha^{\mathcal{M}} = 0$, gdy α jest fałszywa w $\mathcal{M}$.

Przez *zdanie elementarne* w języku $\mathcal{L}$ rozumiemy bądź dowolną formułę domkniętą atomową, bądź zdanie uniwersalne: $\forall x \alpha(x)$, bądź zdanie egzystencjalne: $\exists x \alpha(x)$.

DEFINICJA. Niech α będzie dowolnym zdaniem elementarnym oraz $c_{k_1}, \ldots, c_{k_n}$ dowolnymi różnymi stałymi w nim występującymi (nie muszą to być wszystkie stałe występujące w α). Niech $\alpha'(x_{i_1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_1+n})$ oznacza formułę uzyskaną ze zdania α przez zastąpienie każdego występowania w nim stałej c_{k_1} zmienną x_{i_1}, każdego występowania stałej c_{k_2} zmienną x_{i_1+1} itd., gdzie i_1 jest najmniejszym ze wszystkich indeksów zmiennych indywiduowych nie występujących w α (zakłada się, iż wszystkie zmienne występujące w zdaniu α to: x_1, x_2, x_{i_1-1}). Parę uporządkowaną:
$< \alpha'(x_{i_1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_1+n}), (c_{k_1}, \ldots, c_{k_n}) >$ będziemy nazywać *analizą syntaktyczną zdania α.*

Analizą syntaktyczną zdania elementarnego α jest z definicji również para: $< \alpha, (\ ) >$ (drugim jej elementem jest pusty ciąg).

Gdy zdanie α jest postaci: $\forall x \beta(x)$ ($\exists x \beta(x)$), para uporządkowana symboli: $< \beta(x), \forall >$ ($< \beta(x), \exists >$) jest również jego analizą syntaktyczną.

Każda analiza syntaktyczna A danego zdania elementarnego α wyznacza jednoznacznie w danej interpretacji $\mathcal{M}$ *stan rzeczy* $s^{\mathcal{M}}(A)$, w sposób następujący:

gdy $A = < \alpha'(x_{i_1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_1+n}), (c_{k_1}, \ldots, c_{k_n}) >$,
to $s^{\mathcal{M}}(A) = < \alpha'(x_{i_1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_1+n})^{\mathcal{M}}, (c_{k_1}^{\mathcal{M}}, \ldots, c_{k_n}^{\mathcal{M}}) >$,

gdy $A = < \alpha, (\ ) >$, to $s^{\mathcal{M}}(A) = < \alpha^{\mathcal{M}}, (\ ) >$,

gdy $A = < \beta(x), \forall >$, to $s^{\mathcal{M}}(A) = < \beta(x)^{\mathcal{M}}, D_{\mathcal{M}} >$,

gdy $A = < \beta(x), \exists >$, to $s^{\mathcal{M}}(A) = < \beta(x)^{\mathcal{M}}, \emptyset >$.

Definicja. Powiemy, że stan rzeczy $< \alpha'(x_{i_1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_1+n})^{\mathcal{M}}, (c_{k_1}^{\mathcal{M}}, \ldots, c_{k_n}^{\mathcal{M}}) >$ *zachodzi (ma miejsce) w interpretacji* $\mathcal{M}$, gdy $(c_{k_1}^{\mathcal{M}}, \ldots, c_{k_n}^{\mathcal{M}}) \in \alpha'(x_{i_1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_1+n})^{\mathcal{M}}$. Stan rzeczy $< \alpha^{\mathcal{M}}, (\ ) >$ (α - zdanie elementarne) *zachodzi w* $\mathcal{M}$, gdy $\alpha^{\mathcal{M}} = 1$. Stany rzeczy $< \beta(x)^{\mathcal{M}}, D_{\mathcal{M}} >$, $< \beta(x)^{\mathcal{M}}, \emptyset >$ *zachodzą w* $\mathcal{M}$, gdy odpowiednio, $\beta(x)^{\mathcal{M}} = D_{\mathcal{M}}$, $\beta(x)^{\mathcal{M}} \neq \emptyset$.

Definicja. Mówimy, że analiza syntaktyczna A zdania elementarnego α jest *równoważna semantycznie* analizie B zdania elementarnego β (co zapisujemy: $A \approx B$), gdy dla dowolnej interpretacji $\mathcal{M}$, stan rzeczy $s^{\mathcal{M}}(A)$ zachodzi w $\mathcal{M}$ wtw stan rzeczy $s^{\mathcal{M}}(B)$ zachodzi w $\mathcal{M}$.

Oczywiste FAKTY:

(1) *Relacja semantycznej równoważności jest relacją równoważnościową na zbiorze wszystkich analiz,*

(2) *Dowolne dwie analizy tego samego zdania elementarnego są semantycznie równoważne.*

PRZYKŁAD 1. Oto wszystkie analizy syntaktyczne zdania $\exists x_2(\forall x_1 P(c_1, x_2, x_1) \wedge Q(c_2, x_2))$:

$< \exists x_2(\forall x_1 P(c_1, x_2, x_1) \wedge Q(c_2, x_2)), (\ ) >$

$< \exists x_2(\forall x_1 P(x_3, x_2, x_1) \wedge Q(c_2, x_2)), (c_1) >$

$< \exists x_2(\forall x_1 P(c_1, x_2, x_1) \wedge Q(x_3, x_2)), (c_2) >$

$< \exists x_2(\forall x_1 P(x_3, x_2, x_1) \wedge Q(x_4, x_2)), (c_1, c_2) >$

$< \exists x_2(\forall x_1 P(x_4, x_2, x_1) \wedge Q(x_3, x_2)), (c_2, c_1) >$

$< \forall x_1 P(c_1, x_2, x_1) \wedge Q(c_2, x_2), \exists >$

PRZYKŁAD 2. Dowolna analiza syntaktyczna zdania: $c_1 = c_2$ jest semantycznie równoważna każdej analizie zdania $c_2 = c_1$. Np. analiza $< x_1 = x_2, (c_1, c_2) >$ pierwszego zdania jest semantycznie równoważna analizie $< x_2 = x_1, (c_1, c_2) >$ drugiego zdania.

Ponadto, dla 1-argumentowych $P, Q \in \{P_1, \ldots, P_q\}$, analiza $< P(x_1) \vee \neg P(x_1), \forall >$ zdania $\forall x_1(P(x_1) \vee \neg P(x_1))$ jest semantycznie równoważna analizie $< Q(x_1) \vee \neg Q(x_1), \forall >$ zdania logicznie równoważnego pierwszemu: $\forall x_1(Q(x_1) \vee \neg Q(x_1))$.

Dla 2-argumentowego predykatu R analizy
$< R(x_1, c_1) \vee \neg R(x_1, c_1), \forall >$,
$< \forall x_1(R(x_1, x_2) \vee \neg R(x_1, x_2)), (c_2) >$ odpowiednio zdań logicznie równoważnych:
$\forall x_1(R(x_1, c_1) \vee \neg R(x_1, c_1))$,
$\forall x_1(R(x_1, c_2) \vee \neg R(x_1, c_2))$, są semantycznie równoważne.

W ogólności zachodzi

Fakt 3. *Dowolne analizy syntaktyczne zdań elementarnych logicznie równoważnych są semantycznie równoważne.*

Dowód: Niech α, β będą zdaniami elementarnymi takimi, że dla dowolnej interpretacji $\mathcal{M}: \alpha^{\mathcal{M}} = 1$ wtw $\beta^{\mathcal{M}} = 1$. Niech ponadto A, B będą analizami odpowiednio zdań α, β. Ponieważ na mocy Faktu 2, $< \alpha, ( ) > \approx A$, $< \beta, ( ) > \approx B$ oraz z definicji relacji $\approx$: $< \alpha, ( ) > \approx < \beta, ( ) >$, więc zgodnie z Faktem 1: $A \approx B$.

Definicja. Przez *sytuację elementarną w sensie pierwszym* (dalej nazywaną: "sytuacja elementarna I") *w danej interpretacji* $\mathcal{M}$ *wyznaczoną zdaniem elementarnym* α rozumiemy zbiór $\|\alpha\|_I^{\mathcal{M}} = \{s^{\mathcal{M}}(A) : A$ jest analizą pewnego zdania elementarnego β oraz $A \approx < \alpha, (\ ) >\}$.

(Innymi słowy, sytuacja elementarna I wyznaczona w $\mathcal{M}$ przez elementarne zdanie α to zbiór stanów rzeczy wyznaczonych w $\mathcal{M}$ przez wszystkie te analizy syntaktyczne (jakichś zdań), które są semantycznie równoważne jakiejkolwiek analizie zdania α).

Definicja. Przez *sytuację elementarną w sensie drugim* (dalej nazywaną: "sytuacja elementarna II") *w danej interpretacji* $\mathcal{M}$ *wyznaczoną zdaniem elementarnym* α rozumiemy zbiór $\|\alpha\|_{II}^{\mathcal{M}} = \{s^{\mathcal{M}}(A) : A$ jest analizą zdania $\alpha\}$.

Przykład 3. Jest oczywiste, iż $\|c_1 = c_2\|_I^{\mathcal{M}} = \|c_2 = c_1\|_I^{\mathcal{M}}$ w każdej interpretacji $\mathcal{M}$. Jednakże również: $\|c_1 = c_2\|_{II}^{\mathcal{M}} = \|c_2 = c_1\|_{II}^{\mathcal{M}}$ w dowolnej interpretacji $\mathcal{M}$. Bowiem wszystkie analizy zdania pierwszego są postaci:

$A_0 = < c_1 = c_2, (\ ) >,$
$A_1 = < x_1 = x_2, (c_1, c_2) >,$
$A_2 = < x_2 = x_1, (c_2, c_1) >,$
$A_3 = < x_1 = c_2, (c_1) >,$
$A_4 = < c_1 = x_1, (c_2) >,$

natomiast analizy drugiego zdania są następujące:

$B_0 = < c_2 = c_1, (\ ) >,$
$B_1 = < x_2 = x_1, (c_1, c_2) >,$
$B_2 = < x_1 = x_2, (c_2, c_1) >,$
$B_3 = < c_2 = x_1, (c_1) >,$
$B_4 = < x_1 = c_1, (c_2) >.$

Naturalnie, w dowolnej interpretacji $\mathcal{M}$: $s^{\mathcal{M}}(A_i) = s^{\mathcal{M}}(B_i),\ i = 0, \ldots, 4.$

Tymczasem, $\|\forall x_1(R(x_1, c_1) \vee \neg R(x_1, c_1))\|_I^{\mathcal{M}} = \|\forall x_1(R(x_1, c_2) \vee \neg R(x_1, c_2))\|_I^{\mathcal{M}}$ dla każdej interpretacji $\mathcal{M}$, jednakże $\|\forall x_1(R(x_1, c_1) \vee \neg R(x_1, c_1))\|_{II}^{\mathcal{M}} \neq \|\forall x_1(R(x_1, c_2) \vee \neg R(x_1, c_2))\|_{II}^{\mathcal{M}}$ w takiej interpretacji $\mathcal{M}$, w której $c_1^{\mathcal{M}} \neq c_2^{\mathcal{M}}$, bowiem wówczas $s^{\mathcal{M}}(< \forall x_1(R(x_1, x_2) \vee \neg R(x_1, x_2)), (c_1) >) \neq s^{\mathcal{M}}(< \forall x_1(R(x_1, x_2) \vee \neg R(x_1, x_2)), (c_2) >).$

Definicja. Dowolne zdanie elementarne bądź nieelementarne α, *opisuje w danej interpretacji* $\mathcal{M}$ *sytuację nieelementarną* $|\alpha|^{\mathcal{M}}$, zwaną krótko *sytuacją*:

(1) dla dowolnego elementarnego zdania α,
$|\alpha|^{\mathcal{M}} = < \{\|\alpha\|^{\mathcal{M}}\}, \{f \in \{0,1\}^{SE(\mathcal{M})} : f(\|\alpha\|^{\mathcal{M}}) = 1\} >$, gdzie $SE(\mathcal{M})$ jest zbiorem wszystkich sytuacji elementarnych $\|\beta\|^{\mathcal{M}}$, β - zdanie elementarne,

(2) dla dowolnych zdań β, γ,
$|\beta \wedge \gamma|^{\mathcal{M}} = < pr_1(|\beta|^{\mathcal{M}}) \cup pr_1(|\gamma|^{\mathcal{M}}), pr_2(|\beta|^{\mathcal{M}}) \cap pr_2(|\gamma|^{\mathcal{M}}) >$,

(3) dla dowolnej atomowej formuły domkniętej $P(d_1, \ldots, d_n)$:
$|\neg P(d_1, \ldots, d_n)|^{\mathcal{M}} = |(-P)(d_1, \ldots, d_n)|^{\mathcal{M}}$,

(4) dla dowolnej formuły $\beta(x)$, gdzie $x \in Var$,
$|\neg \forall x \beta(x)|^{\mathcal{M}} = |\exists x \neg \beta(x)|^{\mathcal{M}}$,
$|\neg \exists x \beta(x)|^{\mathcal{M}} = |\forall x \neg \beta(x)|^{\mathcal{M}}$,

(5) dla dowolnych zdań β, γ,
$|\neg(\beta \wedge \gamma)|^{\mathcal{M}} = < pr_1(|\neg\beta|^{\mathcal{M}}) \cup pr_1(|\neg\gamma|^{\mathcal{M}}), pr_2(|\neg\beta|^{\mathcal{M}}) \cup pr_2(|\neg\gamma|^{\mathcal{M}}) >$,

(6) dla dowolnego zdania β, $|\neg\neg\beta|^{\mathcal{M}} = |\beta|^{\mathcal{M}}$.