M. Nowak, Materiały do wykładu z logiki na kierunkach humanistycznych

Pojęcie znaku

Definicja *znaku* Ch. S. Peirce'a:

Znak jest to coś, co komuś zastępuje coś innego pod pewnym względem lub w pewien sposób.

Owo "coś innego", czyli to, co jest zastępowane przez znak, nazywane jest *przedmiotem odniesienia* dla tego znaku lub przedmiotem, do którego znak się odnosi.

Znaki dzieli się m.in. na *naturalne* i *konwencjonalne*. Według jednego z kryteriów podziału, znaki naturalne to te, które nie są wytworem ludzkiej cywilizacji; konwencjonalne znaki – to te, które nie są naturalne. Według drugiego kryterium podziału, znak naturalny to taki znak, iż między nim a jego przedmiotem odniesienia występuje naturalny związek, tzn. nie ustalony na mocy konwencji. Znak konwencjonalny to znak, którego związek z przedmiotem odniesienia ustalony jest na podstawie jakiejś umowy (niekoniecznie spisanej czy uświadamianej). Na przykład, ból po prawej dolnej stronie brzucha jest, według pierwszego jak i drugiego kryterium znakiem naturalnym (objawem, symptomem) zapalenia wyrostka robaczkowego. Wyrażenie "kot" jest według obu kryteriów znakiem konwencjonalnym.

Znaki konwencjonalne zwane są *symbolami*.

Definicja *znaczenia* znaku K. Ajdukiewicza.

Znaczenie znaku to, według K. Ajdukiewicza, sposób rozumienia znaku, zależny od m.in. następujących czynników:

(1) typu przedmiotów odniesienia dla znaku,
(2) sposobu kojarzenia przedmiotów odniesienia ze znakiem,
(3) nastawienia uczuciowego do przedmiotów odniesienia.

Dysponując pojęciem znaku można definiować specjalne systemy znaków jakimi są języki.

Pojęcie języka

Język według lingwistyki matematycznej:

Przez *język o słowniku* Σ rozumiemy dowolny niepusty zbiór skończonych ciągów symboli z Σ. Dowolny ciąg symboli należący do języka nazywamy *wyrażeniem* tego języka.

Słownik jest to dowolny niepusty zbiór symboli.

Język polski jest pewnym zbiorem skończonych ciągów symboli. Symbolem jest tu pojedyńczy wyraz lub znak interpunkcyjny, zaś słownikiem – zbiór wszystkich wyrazów oraz znaków interpunkcyjnych.

Kategorie syntaktyczne w języku naturalnym (etnicznym)

W literaturze istnieje precyzyjna, lecz "nieoperacyjna" (tzn. niestosowalna w pewnych przypadkach) definicja kategorii (typu syntaktycznego) wedug K. Ajdukiewicza:

Definicja kategorii syntaktycznej
Mówimy, że wyrażenia A i B danego języka należą do tej samej kategorii syntaktycznej (lub są tego samego typu syntaktycznego), gdy z dowolnego wyrażenia $W(A)$, którego właściwym składnikiem jest A, po zamianie wyrażenia A na wyrażenie B, otrzymujemy ciąg symboli $W(B)$ będący wyrażeniem tego języka.

Przykład. Wyrażenia języka polskiego: "lub", "człowiek" nie są tego samego typu. Np. wyrażenie $W(\textit{człowiek})$ postaci: "Jan Kowalski jest człowiekiem" staje się po zamianie wyrażenia "człowiek" na wyrażenie "lub" ciągiem $W(lub)$: "Jan Kowalski jest lub", który nie jest wyrażeniem języka polskiego.

Definicja kategorii syntaktycznej pozwala, jak widać, na ustalenie, że dane dwa wyrażenia nie należą do tej samej kategorii. Nie pozwala jednak na ustalenie, czy dwa wyrażenia należą do tej sanej kategorii, w przypadku gdy posługując się wielokrotnie tą definicją, nie wykazujemy, że nie należą do tej samej kategorii.

W języku etnicznym wyróżnia się dwie *podstawowe* kategorie syntaktyczne: *nazwy* i *zdania* oraz kategorie *pochodne*: *funktorowe* i *operatorowe*.

Nazwy
Z powodu nieoperacyjności definicji typu syntaktycznego wprowadza się, niezależnie od niej, definicję typu wyrażeń zwanych nazwami.

Definicje nazwy, desygnatu nazwy, jej zakresu i treści
Nazwa jest w to wyrażenie mogące pełnić funkcję podmiotu lub orzecznika w zdaniu podmiotowo-orzecznikowym.

Desygnat nazwy jest to przedmiot, do którego nazwa ta się odnosi lub inaczej – przedmiot oznaczany przez nazwę.

Zakres nazwy to zbiór wszystkich jej desygnatów.

Treść nazwy to jakikolwiek zbiór cech desygnatów tej nazwy taki, że wszystkie cechy z tego zbioru przysługują każdemu desygnatowi nazwy oraz jeżeli wszystkie cechy z tego zbioru przysługują jakiemuś obiektowi, to obiekt ten jest desygnatem tej nazwy.

Wielkość zakresu nazwy jest odwrotnie proporcjonalna do wielkości treści nazwy, w takim oto sensie: jeżeli treść jednej nazwy jest podzbiorem treści drugiej, to zakres drugiej nazwy jest podzbiorem zakresu tej pierwszej.
Bowiem, przy założeniu inkluzji treści pierwszej nazwy w treści drugiej nazwy, dowolnemu desygnatowi drugiej nazwy przysługują wszystkie cechy należące do treści pierwszej nazwy, zatem z definicji pojęcia treści, musi on być desygnatem pierwszej nazwy; dowodzi to inkluzji zakresu drugiej nazwy w zakresie pierwszej.

Ze względu na ilość desygnatów, nazwy dzielimy na *ogólne, jednostkowe, puste.* Nazwa mająca więcej niż jeden desygnat nazywana jest *ogólną*, ta, która ma dokładnie jeden desygnat nazywana jest *jednostkową*, wreszcie ta, która nie ma desygnatów – nazywana jest *pustą*.

Ze względu na wielkość treści, nazwy dzielimy na *indywidualne* – mające treść pustą, oraz *generalne* – których treść jest niepustym zbiorem. Np. nazwa "Wisła" jest w każdym ze swoich znaczeń nazwą indywidualną, tymczasem nazwa "najdłuższa rzeka w Polsce" jest generalna, choć również jak "Wisła" – jednostkowa.

Logika nazw

Słownik języka logiki nazw zawiera następujące symbole:
$S, M, P, S_1, M_1, P_1, S_2, M_2, P_2, \ldots$ - zmienne nazwowe
a, e, i, o - funktory zdaniotwórcze od dwóch argumentów nazwowych

Język:

Każdy ciąg symboli ze słownika postaci: XuY, gdzie X, Y są zmiennymi nazwowymi, a u jest jednym z czterech funktorów ze słownika, jest formułą języka logiki nazw i tylko takie ciągi są formułami tego języka.
Zmienne nazwowe reprezentują dowolne nazwy ogólne z języka etnicznego.

Formuła: SaP, reprezentuje funkcję zdaniową: *każde S jest P*, będącą schematem tzw. zdania *ogólnotwierdzącego* (np. "każda ryba jest drapieżnikiem")

Formuła: SeP, reprezentuje funkcję zdaniową: *żadne S nie jest P*, będącą schematem tzw. zdania *ogólnoprzeczącego* (np. "żadna ryba nie jest drapieżnikiem")

Formuła: SiP, reprezentuje funkcję zdaniową: *niektóre S są P*, będącą schematem tzw. zdania *szczegółowotwierdzącego* (np. "niektóre ryby są drapieżnikami")

Formuła: SoP, reprezentuje funkcję zdaniową: *niektre S nie są P*, będącą schematem tzw. zdania *szczegółowoprzeczącego* (np. "niektóre ryby nie są drapieżnikami").

Semantyka:

Niech V będzie przyporządkowaniem każdej zmiennej nazwowej X dokładnie jednego, lecz dowolnego zbioru więcej niż 1-elementowego, oznaczanego tu w postaci $V(X)$. (Domyślnie, jeśli zmienna X reprezentuje daną nazwę, to $V(X)$ jest zakresem tej nazwy.) Przyporządkowanie V nazwiemy wartościowaniem.

Aby określić sposób przyporządkowania wartości logicznych prawdy lub fałszu dowolnej formule języka logiki nazw, zdefiniujmy dwa znane stosunki między zbiorami:

Zbiór A jest *podzbiorem* zbioru B ($A \subseteq B$), gdy dla dowolnego obiektu b, jeżeli b jest elementem zbioru A ($b \in A$), to b jest elementem zbioru B ($b \in B$).

Zbiory A, B są *rozłączne*, gdy nie istnieje obiekt b taki, że $b \in A$ oraz $b \in B$, czyli, gdy zbiory te nie mają wspólnego elementu.

Dla dowolnego wartościowania V, dla dowolnych zmiennych nazwowych X, Y, powiemy, że

formuła XaY jest prawdziwa przy wartościowaniu V, gdy $V(X)$ jest podzbiorem zbioru $V(Y)$,

formuła XeY jest prawdziwa przy wartościowaniu V, gdy zbiory $V(X), V(Y)$ są rozłączne,

formuła XiY jest prawdziwa przy wartościowaniu V, gdy zbiory $V(X), V(Y)$ nie są rozłączne,

formuła XoY jest prawdziwa przy wartościowaniu V, gdy $V(X)$ nie jest podzbiorem zbioru $V(Y)$.

Zauważmy, że zachodzi prosty związek:
dla dowolnego wartościowania V, XaY jest prawdziwa przy V wtw XoY jest fałszywa (tzn. nie jest prawdziwa) przy V,
XeY jest prawdziwa przy V wtw XiY jest fałszywa przy V.

Centralnym pojęciem jest *wynikanie logiczne*:

Definicja wynikania logicznego
Mówimy, że ze zbioru formuł Z *wynika logicznie* formuła α ($Z \models \alpha$), gdy dla każdego wartościowania V, przy którym wszystkie formuły z Z są prawdziwe, α jest również prawdziwa.

Przykłady. **(1)** Formuła SaP wynika logicznie ze zbioru formuł $\{SaM, MaP\}$. Aby tego dowieść, zakładamy, że przy jakimś, dowolnie wybranym wartościowaniu V prawdziwe są formuły SaM, MaP, co zapisujemy w postaci pierwszych wyrażeń dowodu:

rozważmy dowolne wartościowanie V,
(1) SaM jest prawdziwa przy V (założenie),
(2) MaP jest prawdziwa przy V (założenie).

Po tych założeniach celem dowodu jest wykazanie, iż
(cel1) formuła SaP jest prawdziwa przy wartościowaniu V.
Korzystając z warunku prawdziwości dla formuły ogólnotwierdzącej specyfikujemy ów cel w postaci:
(cel2) $V(S) \subseteq V(P)$.
Aby go osiągnąć stosujemy definicję stosunku *bycia podzbiorem*, zatem wykazujemy, że
(cel3) dla dowolnego obiektu b, jeżeli $b \in V(S)$, to $b \in V(P)$.

Aby go zrealizować załóżmy, że dowolnie wybrany obiekt b jest elementem zbioru $V(S)$:

rozważmy dowolny obiekt b,
(3) $b \in V(S)$ (założenie).

Teraz celem dowodu staje się wykazanie, że
(cel4) $b \in V(P)$.
Dalsza specyfikacja celw dowodu nie nastąpi, bowiem bycie elementem ($\in$) zbioru jest terminem pierwotnym, tzn. nie istnieje jego definicja wyraźna, z której można by korzystać, aby specyfikować dalej cel. Dlatego aby osiągnąć (cel4) korzystamy z informacji (1), (2), (3) w sposób następujący. Na podstawie warunku prawdziwości dla formuły ogólnotwierdzącej, $V(S)$ jest podzbiorem $V(M)$ oraz $V(M)$ jest podzbiorem zbioru $V(P)$:

(4) $V(S) \subseteq V(M)$ z (1),
(5) $V(M) \subseteq V(P)$ z (2)

Korzystając z definicji *bycia podzbiorem*, wyrażenia (4), (5) zamieniamy na

(6) dla dowolnego obiektu x, jeżeli $x \in V(S)$, to $x \in V(M)$ z (4),
(7) dla dowolnego obiektu x, jeżeli $x \in V(M)$, to $x \in V(P)$ z (5).

Ostatecznie otrzymujemy:

(8) $b \in V(M)$ z (3), (6),
(9) $b \in V(P)$ z (8), (7),

co kończy dowód.

(2) Wykażemy, że $\{MaP, MaS\} \models SiP$.

rozważmy dowolne wartościowanie V,
(1) MaP jest prawdziwa przy V (założenie),
(2) MaS jest prawdziwa przy V (założenie),
(3) $V(M) \subseteq V(P)$ z (1),
(4) $V(M) \subseteq V(S)$ z (2),
(5) $V(M)$ jest niepustym zbiorem - z warunku semantycznego, według którego zbiór $V(X)$ jest więcej niż 1-elementowy,
istnieje obiekt b taki, że
(6) $b \in V(M)$ z (5),
(7) $b \in V(P)$ z (3), (6),
(8) $b \in V(S)$ z (4), (6),
(9) zbiory $V(S), V(P)$ nie są rozłączne - z (8),
SiP jest prawdziwa przy V - z (9).

(3) Wykazujemy, że formuła SeP wynika logicznie ze zbioru formuł $\{SaM, MeP\}$, metodą *nie wprost*.

Dowieść danego zdania (twierdzenia) *nie wprost*, to założyć, że jest ono fałszywe, czyli założyć, że zaprzeczenie tego zdania jest prawdziwe i na tej podstawie, stosując definicje wyrażeń występujących w zdaniu, jak również być może znane twierdzenia, dojść do absurdu. Polega on na wyprowadzeniu (wywnioskowaniu) dowolnej pary zdań, w której jedno zdanie jest zaprzeczeniem drugiego.

(1) $\{SaM, MeP\} \not\models SeP$ (założenie)
istnieje wartościowanie V takie, że
(2) SaM jest prawdziwa przy V z (1),
(3) MeP jest prawdziwa przy V z (1),
(4) SeP jest fałszywa przy V z (1),
(5) $V(S) \subseteq V(M)$ z (2),
(6) $V(M), V(P)$ są rozłączne - z (3),
(7) zbiory $V(S), V(P)$ nie są rozłączne - z (4),
istnieje obiekt b taki, że
(8) $b \in V(S)$ z (7),
(9) $b \in V(P)$ z (7),
(10) $b \in V(M)$ z (8), (5),
(11) zbiory $V(M), V(P)$ nie są rozłączne z (9), (10),
absurd (6), (11).

(4) Aby wykazać, że $\{MaP, SoM\} \not\models SoP$ należy wskazać takie wartościowanie V, przy ktrym formuły MaP, SoM są prawdziwe, zaś formuła SoP jest fałszywa. Na przykład, $V(S)$ = zbiór miast zamieszkałych przez co najmniej 1 mln mieszkańców, $V(M)$ = zbiór stolic krajów, $V(P)$ = zbiór miast.

Definicja prawa logicznego (logicznej prawdziwości lub tautologii)
Formuła α jest *prawem logicznym* (jest *logicznie prawdziwa* lub jest *tautologią*) logiki nazw, gdy α jest prawdziwa przy każdym wartościowaniu V.

Przykład. Formuły SaS, SiS są logicznie prawdziwe. Dowód pierwszego faktu przebiega następująco:
rozważmy dwolne wartościowanie V,
(1) $V(S) \subseteq V(S)$ (na podstawie łatwo dowodliwego z definicji *bycia podzbiorem*, twierdzenia: $A \subseteq A$),
(2) SaS jest prawdziwa przy V z (1).

Definicja sprzecznego zbioru formuł
Zbiór formuł Z nazywamy niesprzecznym według logiki nazw, gdy istnieje wartościowanie V, przy którym każda formuła ze zbioru Z jest prawdziwa. Zbiór formuł jest *sprzeczny*, gdy nie jest niesprzeczny.

Przykłady (1) Zbiory formuł $\{SaP, SoP\}$, $\{SeP, SiP\}$, $\{SoS\}$ są sprzeczne. Dowód nie wprost pierwszego faktu przebiega następująco:
(1) zbiór formuł $\{SaP, SoP\}$ jest niesprzeczny (założenie),
istnieje wartościowanie V takie, że
(2) formuła SaP jest prawdziwa przy V z (1),

(3) formuła SoP jest prawdziwa przy V z (1),
(4) $V(S) \subseteq V(P)$ z (2),
(5) $V(S) \not\subseteq V(P)$ z (3),
absurd (4),(5).

(2) Aby wykazać, że zbiór formuł $\{SeM, MaP, SiP\}$ jest niesprzeczny, należy wskazać takie wartościowanie V, przy którym wszystkie formuły z tego zbioru są prawdziwe, np. $V(S) =$ zbiór krów, $V(M) =$ zbiór koni, $V(P) =$ zbiór zwierząt roślinożernych.

Zdania

Nie każde zdanie z języka etnicznego zaliczane jest do kategorii zdań. Należą do niej wyłącznie zdania oznajmujące, *prawdziwe* bądź *fałszywe*. Kategorię zdań dzielimy na zdania *proste* i *złożone*, lecz kryterium tego podziału nie jest liczba występujących w zdaniu orzeczeń (jak w gramatyce), ale występowanie tzw. spójnika (funktora zdaniotwórczego od argumentów zdaniowych). Zdanie, w którym nie występuje spójnik nazywamy *prostym*, zdanie, które nie jest proste, nazywamy *złożonym*.

Najważniejszy typ zdań prostych stanowią zdania *podmiotowo-orzecznikowe*, tzn. zdania postaci: $a\ jest\ P$, gdzie a jest podmiotem, zaś P – orzecznikiem, np. "Jan Kowalski jest studentem".

Wsród zdań złożonych wyróżnia się m.in.
- zdania *negacyjne*, postaci: *nieprawda, że* A,
- *koniunkcyjne*: $A\ i\ B$,
- *alternatywne*: $A\ lub\ B$,
- *implikacyjne*: $jeżeli\ A,\ to\ B$,
- *równoważnościowe*: $A\ wtedy\ i\ tylko\ wtedy, gdy\ B$,

gdzie A, B są dowolnymi zdaniami.

Funktory

Mamy nie jedną, lecz wiele tzw. kategorii funktorowych, do ktrych należą *funktory*

Definicja funktora

Funktor jest to wyrażenie służące do tworzenia wyrażeń złożonych z mniej złożonych.

Wyrażenie złożone uzyskujemy z wyrażeń mniej złożonych przez dołączenie do nich funktora. Wyrażenia, które dołączamy do funktora nazywamy jego *argumentami.*

Aby wygodnie przedstawić kategorie syntaktyczne funktorowe, przyporządkowuje się każdej kategorii syntaktycznej odpowiedni wskaźnik. Kategorii nazw przyporządkowujemy wskaźnik: n, zaś kategorii zdań – z.

Wówczas każdej kategorii funktorowej przyporządkowany jest wskaźnik postaci ułamka, w liczniku którego występuje wskaźnik kategorii wyrażenia złożonego powstałego przez dołączenie do funktora argumentów, zaś w mianowniku występują wskaźniki (odzielone przecinkami) kategorii, do których należą argumenty.

Najważniejsze kategorie funktorowe:

$\frac{n}{n}$ – funktory nazwotwórcze od jednego argumentu nazwowego, czyli wyrażenia, które dołączone do jednej nazwy tworzą nową nazwę, np. "wysoki", "ładny", "$-$",

$\frac{n}{n,n}$ – funktory nazwotwórcze od dwóch argumentów nazwowych, czyli wyrażenia, które dołączone do dwóch nazw tworzą nową nazwę, np. "nad", "pod", "$+$",

$\frac{z}{n}$ – funktory zdaniotwórcze od jednego argumentu nazwowego, czyli wyrażenia, które dołączone do jednej nazwy tworzą zdanie, np. "świeci", "jest człowiekiem",

$\frac{z}{n,n}$ – funktory zdaniotwórcze od dwóch argumentów nazwowych, czyli wyrażenia, które dołączone do dwóch nazw tworzą zdanie, np. "kocha", "lubi" "$\leq$",

$\frac{z}{z}$ – funktory zdaniotwórcze od jednego argumentu zdaniowego, czyli wyrażenia, które dołączone do jednego zdania tworzą nowe zdanie, np. "nieprawda, że", "jest konieczne, że",

$\frac{z}{z,z}$ – funktory zdaniotwórcze od dwóch argumentów zdaniowych, czyli wyrażenia, które dołączone do dwóch zdań tworzą nowe zdanie, np. "i", "lub", "jeżeli,to", "wtedy i tylko wtedy, gdy".

Definicje predykatu i spójnika
Funktory zdaniotwórcze od jednego lub większej ilości argumentów nazwowych nazywamy *predykatami*.
Funktory zdaniotwórcze od jednego lub większej ilości argumentów zdaniowych nazywamy *spójnikami*.

Istotną rolę w logice klasycznej odgrywają tzw. *spójniki ekstensjonalne* (*prawdziwościowe*). Aby je przedstawić, dobrze jest wystartować od koncepcji znaczenia wyrażenia autorstwa Gottloba Fregego.

Znaczenie wyrażenia według Gottloba Fregego

G. Frege (1848-1925) - niemiecki matematyk i filozof, odkrywca aksjomatycznej wersji klasycznej logiki zdaniowej; autor semantycznych rozstrzygnięć ustalających typy odniesień i sensów dla wyrażeń nasyconych, czyli nazw i zdań oraz nienasyconych, czyli funktorów; twórca koncepcji znaczenia kwantyfikatorów jako specjalnych własności przysługujących innym własnościom; zwrócił uwagę na pewne zjawisko językowe, zwane później *intensjonalnością*; twórca tzw. *logicyzmu*, czyli poglądu, według którego pojęcia matematyczne są sprowadzalne do (definiowalne przez) pojęć logiki, a w rezultacie, iż twierdzenia matematyczne są wyprowadzalne z zasad logiki.

Definicja znaczenia, denotacji i sensu wyrażenia według G. Fregego

Znaczenie dowolnego wyrażenia A jest określone przez dwa komponenty: *denotację* tego wyrażenia: $D(A)$ oraz *sens* tego wyrażenia: $S(A)$.

$D(A)$ jest obiektem, do którego wyrażenie A się odnosi, tzn. jest tym bytem, dla którego A jest znakiem.

$S(A)$ jest sposobem, w jaki denotacja wyrażenia A jest ustalana. Znajomość sensu wyrażenia jest niezbędnym, choć na ogół niewystarczającym warunkiem ustalenia denotacji tego wyrażenia.

Gdy wyrażenie A jest nazwą, denotacja $D(A)$ jest jej desygnatem bądź zakresem. (Frege przez nazwę rozumiał takie wyrażenie, które we współczesnej literaturze polskiej nazywane jest "nazwą jednostkową" lub "nazwą pustą o intencji jednostkowej".) Sens $S(A)$ zazwyczaj jest utożsamiany z treścią nazwy A.

Gdy wyrażenie A jest zdaniem, denotacja $D(A)$ jest wartością logiczną tego zdania, czyli Prawdą (1), bądź Fałszem (0). Według Fregego zdania oznajmujące odnoszą się do Prawdy bądź Fałszu. Sens $S(A)$ zdania A jest myślą w zdaniu A wyrażoną, zwaną inaczej *sądem w sensie logicznym.*

Zasada kompozycyjności denotacji G. Fregego

Denotacja wyrażenia złożonego jest jednoznacznie określona przez denotacje wyrażeń składowych tego wyrażenia.

Innymi słowy, jeżeli $W(A)$ jest wyrażeniem złożonym, w którym wyrażenie A jest składnikiem oraz B jest wyrażeniem o tej samej denotacji co wyrażenie A, to wyrażenie $W(B)$, powstałe przez zastąpienie wyrażenia A w $W(A)$ wyrażeniem B, ma tę samą denotację co wyrażenie $W(A)$.

Przykłady (1) $W(A) :=$ Warszawa jest stolicą Polski
$D(W(A)) = 1$
$A :=$ Warszawa
$B :=$ największe miasto w Polsce
$D(A) = D(B)$
$W(B) :=$ Największe miasto w Polsce jest stolicą Polski,
$D(W(B)) = 1$
$D(W_1(A_1)) = D(W_1(B_1))$.

(2) $W_1(A_1) :=$ Jest konieczne, że Warszawa jest stolicą Polski
$D(W_1(A_1)) = 0$
$A_1 :=$ Warszawa jest stolicą Polski
$B_1 :=$ Każdy kwadrat jest prostokątem
$D(A_1) = D(B_1) = 1$
$W_1(B_1) :=$ Jest konieczne, że każdy kwadrat jest prostokątem
$D(W_1(B_1)) = 1$
$D(W_1(A_1)) \neq D(W_1(B_1))$

Definicja funktora ekstensjonalnego i intensjonalnego

Funktor n-argumentowy F nazywamy *ekstensjonalnym*, gdy dla dowolnych jego argumentów $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotacja $D(F(A_1, A_2, \ldots, A_n))$ wyrażenia złożonego $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, powstałego przez dołączenie funktora F do argumentów $A_1, A_2, \ldots, A_n$, jest jednoznacznie określona przez denotacje $D(A_1)$, $D(A_2), \ldots, D(A_n)$ tych argumentów.

Funktor nazywamy *intensjonalnym*, gdy nie jest on ekstensjonalny.

Zatem funktor n-argumentowy F jest intensjonalny, gdy istnieją jego argumenty $A_1, A_2, \ldots, A_n$ oraz argument B tego samego typu co argument A_i dla pewnego $i = 1, 2, \ldots, n$ takie, że $D(B) = D(A_i)$ oraz $D(F(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n)) \neq D(F(A_1, A_2, \ldots, B, \ldots, A_n))$

Przykłady. Funktor "dawny" typu $\frac{n}{n}$ jest intensjonalny:
$F :=$ dawny
$A :=$ senator Rzeczypospolitej
$F(A) :=$ dawny senator Rzeczypospolitej
$B :=$ kolega marszałka Bogdana Borusewicza, przy czym $D(A) = D(B)$
$F(B) :=$ dawny kolega marszałka Bogdana Borusewicza
$D(F(A)) \neq D(F(B))$

Funktor "jest konieczne, że" typu $\frac{z}{z}$ jest intensjonalny:
$F :=$ jest konieczne, że
$A :=$ Warszawa jest stolicą Polski
$F(A) :=$ Jest konieczne, że Warszawa jest stolicą Polski
$B :=$ Każdy kwadrat jest prostokątem
$D(A) = D(B) = 1$
$F(B) :=$ Jest konieczne, że każdy kwadrat jest prostokątem
$D(F(A)) \neq D(F(B))$.

Z ogólnej definicji funktora ekstensjonalnego otrzymujemy:

Definicję spójnika ekstensjonalnego

Spójnik n-argumentowy F jest ekstensjonalny, gdy dla dowolnych jego argumentów $A_1, A_2, \ldots, A_n$, wartość logiczna zdania $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ jest jednoznacznie określona przez wartości logiczne argumentów $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Najważniejsze spójniki ekstensjonalne:

negacja: nieprawda, że ... ($\sim$),

koniunkcja: ... i ... ($\wedge$),

alternatywa: ... lub ... (co najmniej jedno z dwojga ... , ...) ($\vee$)

implikacja: jeżeli ..., to ... ($\rightarrow$)

równoważność: ... wtedy i tylko wtedy, gdy ... ($\leftrightarrow$)

alternatywa rozłączna: ... albo ... (dokładnie jedno z dwojga ... , ...) ($\div$)

alternatywa Sheffera: co najwyżej jedno z dwojga ... , ... (/)

binegacja: ani nie ... , ani nie ... (\)

Sposoby jednoznacznego wyznaczania wartości logicznej zdań, w których funktorami głównymi są niektóre wymienione spójniki, w zależności od wartości logicznych argumentów tych funktorów, podane są w postaci następujących tabelek:

A	$\sim A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A/B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	$A \backslash B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

W dalszym ciągu, wartości logiczne będziemy przyporządkowywać formułom standardowego języka zdaniowego.

Język klasycznej logiki zdaniowej (standardowy język zdaniowy)

Słownik jest tu zbiorem następujących symboli:
zmiennych zdaniowych: $p_0, p_1, p_2, \ldots,$
spójników: $\sim, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow,$
nawiasów: (,) .

Definicja standardowego języka zdaniowego podaje, jakie skończone ciągi symboli ze słownika są wyrażeniami tego języka; wyrażenie tego języka nazywane jest *formułą*:

(1) każda zmienna zdaniowa (traktowana jako 1-wyrazowy ciąg) jest formułą,

(2) jeżeli skończony ciąg symboli α jest formułą, to ciąg postaci: $\sim \alpha$, również jest formułą,

(3) jeżeli ciągi α, β są formułami, to ciągi postaci: $(\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$, również są formułami,

(4) jeżeli ciąg α jest formułą, to α jest bądź zmienną zdaniową, bądź ciągiem symboli uzyskanym z prostszych formuł na postawie zastosowania przynajmniej jednej z reguł (2), (3).

Przykład. Następujące ciągi symboli są formułami: $(((p_0 \to p_2) \wedge p_0) \to p_2)$, $((p_0 \to (p_2 \wedge p_0)) \to p_2)$. Zazwyczaj nawiasy zewnętrzne pomijamy. Zatem powyższe dwie formuły zapisujemy w postaci: $((p_0 \to p_2) \wedge p_0) \to p_2$, $(p_0 \to (p_2 \wedge p_0)) \to p_2$.

Klasyczna logika zdaniowa

Centralnymi pojęciami są tu *wynikanie logiczne, tautologia (prawo logiczne), sprzeczny zbiór formuł* .

Definicja wartościowania logicznego

Dowolne przyporządkowanie każdej zmiennej zdaniowej p dokładnie jednej z dwu wartości logicznych: 0, 1, nazywamy *wartościowaniem logicznym.*

Dane wartościowanie można rozszerzyć do przyporządkowania dokładnie jednej z dwu wartości logicznych każdej formule języka zdaniowego, w zależności od kształtu tej formuły, postępując według tabelek określających wartość logiczną formuły złożonej w zależności od wartości logicznych jej podformuł.

Tak więc, formule negacyjnej $\sim \alpha$ dowolne wartościowanie przyporządkowuje wartość 1 dokładnie wówczas, gdy przyporządkowuje ono formule α wartość 0.

Formule koniunkcyjnej $\alpha \wedge \beta$ każde wartościowanie przyporządkowuje wartość 1 dokładnie wówczas, gdy obu formułom α, β wartościowanie to przyporządkowuje wartość 1.

Formule postaci $\alpha \vee \beta$ dowolne wartościowanie przyporządkowuje wartość 0 dokładnie wtedy, gdy obu formułom α, β przyporządkowuje ono wartość 0.

Formule implikacyjnej $\alpha \to \beta$ dowolne wartościowanie przyporządkowuje wartość 0 dokładnie wtedy, gdy formule α wartościowanie to przyporządkowuje wartość 1 oraz formule β wartość 0.

Formule równoważnościowej $\alpha \leftrightarrow \beta$ każde wartościowanie przyporządkowuje wartość 1 dokładnie wówczas, gdy przyporządkowuje ono obu formułom α, β tę samą wartość logiczną.

Wówczas, gdy dane wartościowanie przyporządkowuje danej formule wartość 1 (0) mówimy, że jest ona prawdziwa (fałszywa) przy tym wartościowaniu.

Definicje wynikania logicznego, tautologii oraz sprzecznego zbioru formuł

Mówimy, że formuła α *wynika logicznie* ze zbioru formuł Z ($Z \models \alpha$), gdy α jest prawdziwa przy każdym wartościowaniu, przy którym prawdziwe są wszystkie formuły ze zbioru Z.

Mówimy, że formuła α jest *tautologią* (jest *prawem logicznym* lub jest *logicznie oprawdziwa*), gdy każde wartościowanie przyporządkowuje jej wartość

1.

Zbiór formuł nazywamy *niesprzecznym*, gdy istnieje wartościowanie, które każdej formule z tego zbioru przyporządkowuje wartość 1. Zbiór formuł, który nie jest niesprzeczny nazywamy *sprzecznym*.

Przy sprawdzaniu wynikania logicznego, logicznej prawdziwości lub sprzeczności zbioru formuł wykonujemy czynności dwóch typów: *korzystamy* z informacji o wartości logicznej formuły przy danym wartościowaniu, bądź *wykazujemy*, że formuła jest prawdziwa lub fałszywa przy danym wartościowaniu. Zgodnie z warunkami prawdziwości formuł przy danym wartościowaniu (czyli zgodnie z tabelkami określającymi znaczenia standardowych spójników) wyróżnić można następujące sposoby (reguły) korzystania z prawdziwości ($K1$) lub fałszywości ($K0$) formuł przy danym wartościowaniu (nad poziomą linią podawana jest dana informacja, z której się korzysta, pod tą linią występuje wyrażenie (lub wyrażenia), które dzięki tej informacji można do dowodu wpisać):

$$\begin{array}{c|c}
(K1 \sim) & (K0 \sim) \\
\sim \alpha \text{ jest 1 przy } v & \sim \alpha \text{ jest 0 przy } v \\
\hline
\alpha \text{ jest 0 przy } v & \alpha \text{ jest 1 przy } v
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
(K1\wedge) & (K0\vee) \\
\alpha \wedge \beta \text{ jest 1 przy } v & \alpha \vee \beta \text{ jest 0 przy } v \\
\hline
\alpha \text{ jest 1 przy } v & \alpha \text{ jest 0 przy } v \\
\beta \text{ jest 1 przy } v & \beta \text{ jest 0 przy } v
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
(K0 \wedge (a)) & (K1 \vee (a)) \\
\alpha \wedge \beta \text{ jest 0 przy } v & \alpha \vee \beta \text{ jest 1 przy } v \\
\hline
\alpha \text{ jest 0 przy } v \text{ (założenie)} & \alpha \text{ jest 1 przy } v \text{ (założenie)} \\
\vdots & \vdots \\
\text{cel} & \text{cel} \\
\hline
\beta \text{ jest 0 przy } v \text{ (założenie)} & \beta \text{ jest 1 przy } v \text{ (założenie)} \\
\vdots & \vdots \\
\text{cel} & \text{cel}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
(K0 \wedge (b)) & (K1 \vee (b)) \\
\alpha \wedge \beta \text{ jest 0 przy } v & \alpha \vee \beta \text{ jest 1 przy } v \\
\alpha \text{ jest 1 przy } v & \alpha \text{ jest 0 przy } v \\
\hline
\beta \text{ jest 0 przy } v & \beta \text{ jest 1 przy } v
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} (K0 \wedge (c)) & (K1 \vee (c)) \\ \alpha \wedge \beta \text{ jest 0 przy } v & \alpha \vee \beta \text{ jest 1 przy } v \\ \beta \text{ jest 1 przy } v & \beta \text{ jest 0 przy } v \\ \hline \alpha \text{ jest 0 przy } v & \alpha \text{ jest 1 przy } v \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (K1 \rightarrow (a)) \\ \alpha \rightarrow \beta \text{ jest 1 przy } v \\ \alpha \text{ jest 1 przy } v \\ \hline \beta \text{ jest 1 przy } v \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (K1 \rightarrow (b)) \\ \alpha \rightarrow \beta \text{ jest 1 przy } v \\ \beta \text{ jest 0 przy } v \\ \hline \alpha \text{ jest 0 przy } v \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (K1 \rightarrow (c)) \\ \alpha \rightarrow \beta \text{ jest 1 przy } v \\ \hline \sim \alpha \vee \beta \text{ jest 1 przy } v \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (K0 \rightarrow) \\ \alpha \rightarrow \beta \text{ jest 0 przy } v \\ \hline \alpha \text{ jest 1 przy } v \\ \beta \text{ jest 0 przy } v \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (K1 \leftrightarrow) \\ \alpha \leftrightarrow \beta \text{ jest 1 przy } v \\ \hline \alpha \rightarrow \beta \text{ jest 1 przy } v \\ \beta \rightarrow \alpha \text{ jest 1 przy } v \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (K0 \leftrightarrow) \\ \alpha \leftrightarrow \beta \text{ jest 0 przy } v \\ \hline (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \text{ jest 0 przy } v \end{array}$$

Z kolei wyróżniamy następujące sposoby wykazywania prawdziwości ($W1$) lub fałszywości ($W0$) formuł przy danym wartościowaniu:

$$\begin{array}{c|c} (W1 \sim) & (W0 \sim) \\ \text{wykaż: } \alpha \text{ jest 0 przy } v & \text{wykaż: } \alpha \text{ jest 1 przy } v \\ \hline \text{cel: } \sim \alpha \text{ jest 1 przy } v & \text{cel: } \sim \alpha \text{ jest 0 przy } v \end{array}$$

$$
\begin{array}{c|c}
(W1\wedge) & (W0\vee) \\
\text{wykaż: } \alpha \text{ jest 1 przy } v & \text{wykaż: } \alpha \text{ jest 0 przy } v \\
\text{wykaż: } \beta \text{ jest 1 przy } v & \text{wykaż: } \beta \text{ jest 0 przy } v \\
\hline
\text{cel: } \alpha \wedge \beta \text{ jest 1 przy } v & \text{cel: } \alpha \vee \beta \text{ jest 0 przy } v
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
(W0 \wedge (a)) & (W1\vee)(a) \\
\text{wykaż: } \alpha \text{ jest 0 przy } v & \text{wykaż: } \alpha \text{ jest 1 przy } v \\
\hline
\text{cel: } \alpha \wedge \beta \text{ jest 0 przy } v & \text{cel: } \alpha \vee \beta \text{ jest 1 przy } v
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
(W0 \wedge (b)) & (W1\vee)(b) \\
\text{wykaż: } \beta \text{ jest 0 przy } v & \text{wykaż: } \beta \text{ jest 1 przy } v \\
\hline
\text{cel: } \alpha \wedge \beta \text{ jest 0 przy } v & \text{cel: } \alpha \vee \beta \text{ jest 1 przy } v
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
(W0 \wedge (c)) & (W1\vee)(c) \\
\text{wykaż: } \alpha \to {\sim}\beta \text{ jest 1 przy } v & \text{wykaż: } {\sim}\alpha \to \beta \text{ jest 1 przy } v \\
\hline
\text{cel: } \alpha \wedge \beta \text{ jest 0 przy } v & \text{cel: } \alpha \vee \beta \text{ jest 1 przy } v
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
(W1 \to (a)) \\
\text{załóż: } \alpha \text{ jest 1 przy } v \\
\text{i wykaż: } \beta \text{ jest 1 przy } v \\
\hline
\text{cel: } \alpha \to \beta \text{ jest 1 przy } v
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
(W1 \to (b)) \\
\text{załóż: } \beta \text{ jest 0 przy } v \\
\text{i wykaż: } \alpha \text{ jest 0 przy } v \\
\hline
\text{cel: } \alpha \to \beta \text{ jest 1 przy } v
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
(W1 \to (c)) \\
\text{wykaż: } {\sim}\alpha \vee \beta \text{ jest 1 przy } v \\
\hline
\text{cel: } \alpha \to \beta \text{ jest 1 przy } v
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
(W0 \to) \\
\text{wykaż: } \alpha \text{ jest 1 przy } v \\
\text{wykaż: } \beta \text{ jest 0 przy } v \\
\hline
\text{cel: } \alpha \to \beta \text{ jest 0 przy } v
\end{array}
$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}(W1 \leftrightarrow)\\ \text{wykaż: } \alpha \rightarrow \beta \text{ jest 1 przy } v\\ \text{wykaż: } \beta \rightarrow \alpha \text{ jest 1 przy } v\end{array}}{\text{cel: } \alpha \leftrightarrow \beta \text{ jest 1 przy } v}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}(W0 \leftrightarrow)\\ \text{wykaż: } (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \text{ jest 0 przy } v\end{array}}{\text{cel: } \alpha \leftrightarrow \beta \text{ jest 0 przy } v}$$

Przykłady (1) Wykazujemy, że $\{\sim (p \wedge q)\} \models \sim p \vee \sim q$:

rozważmy dowolne wartościowanie v,
(1) $\sim (p \wedge q)$ jest 1 przy v (założenie),
(2) $p \wedge q$ jest 0 przy v z (1), $(K1 \sim)$,

teraz stosujemy $(K0 \wedge (a))$:

(3) p jest 0 przy v (założenie)
(4) $\sim p$ jest 1 przy v z (3), $(W1 \sim)$,
(5) $\sim p \vee \sim q$ jest 1 przy v, $(W1 \vee (a))$
(6) q jest 0 przy v (założenie)
(7) $\sim q$ jest 1 przy v z (6), $(W1 \sim)$
(8) $\sim p \vee \sim q$ jest 1 przy v z (7), $(W1 \vee (b))$

(2) Wykazujemy nie wprost, że $\{\sim p \vee \sim q\} \models \sim (p \wedge q)$:

(1) $\{\sim p \vee \sim q\} \not\models \sim (p \wedge q)$ (założenie),
istnieje wartościowanie v takie, że
(2) $\sim p \vee \sim q$ jest 1 przy v z (1),
(3) $\sim (p \wedge q)$ jest 0 przy v z (1),
(4) $p \wedge q$ jest 1 przy v z (3), $(K0 \sim)$,
(5) p jest 1 przy v z (4), $(K1\wedge)$,
(6) q jest 1 przy v z (4), $(K1\wedge)$,
(7) $\sim p$ jest 0 przy v z (5), $(W0 \sim)$,
(8) $\sim q$ jest 1 przy v z (2), (7), $(K1 \vee (b))$,
(9) q jest 0 przy v z (8), $(K1 \sim)$,
absurd (6), (9).

(3) Wykazujemy, że $\{p \rightarrow q, \sim q\} \not\models p$ w taki sposób, jak chcielibyśmy dowieść nie wprost, iż $\{p \rightarrow q, \sim q\} \models p$. Naszym celem jest wskazanie takiego wartościowania v, przy którym formuły $p \rightarrow q, \sim q$ są prawdziwe, zaś formuła p jest fałszywa.

(1) $\{p \rightarrow q, \sim q\} \not\models p$ (założenie)
istnieje wartościowanie v takie, że
(2) $p \rightarrow q$ jest 1 przy v z (1),
(3) $\sim q$ jest 1 przy v z (1),

(4) p jest 0 przy v z (1),
(5) q jest 0 przy v z (3), $(K1 \sim)$.

W ten sposób wykazaliśmy, iż jeżeli wynikania tu nie ma, tzn. jeżeli dla pewnego wartościowania v wszystkie formuły w naszym zbiorze są prawdziwe, zaś formuła, która nie wynika logicznie jest przy v fałszywa, to wartościowanie to ma postać: $v(p) = 0,\ v(q) = 0$. Łatwo sprawdzić (przy użyciu tabelek), iż na odwrót, przy tak określonym wartościowaniu v, obie formuły w zbiorze są prawdziwe, zaś formuła nie wynikająca jest fałszywa.

(4) Formuła $((p \to r) \vee (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r)$ jest tautologią:

rozważmy dowolne wartościowanie v,

aby wykazać prawdziwość tej formuły przy wartościowaniu v stosujemy dwukrotnie $(W1 \to (a))$:

(1) $(p \to r) \vee (q \to r)$ jest 1 przy v (założenie),

obecnie celem dowodu jest wykazanie, iż formuła $(p \wedge q) \to r$ jest prawdziwa przy v. Stosujemy więc drugi raz $(W1 \to (a))$:

(2) $p \wedge q$ jest 1 przy v (założenie),

teraz celem dowodu jest wykazanie prawdziwości r przy v:

(3) p jest 1 przy v z (2), $(K1\wedge)$
(4) q jest 1 przy v z (2), $(K1\wedge)$,

stosujemy $(K1 \vee (a))$:

(5) $p \to r$ jest 1 przy v (założenie)
(6) r jest 1 przy v z (5), (3), $(K1 \to (a))$,
(7) $q \to r$ jest 1 przy v (założenie)
(8) r jest 1 przy v z (7), (4), $(K1 \to (a))$.

(5) Wykazujemy niewprost, że formuła $((p \wedge q) \to r) \to ((p \to r) \vee (q \to r))$ jest tautologią:

(1) $((p \wedge q) \to r) \to ((p \to r) \vee (q \to r))$ nie jest tautologią (założenie)
istnieje wartościowanie v takie, że
(2) $((p \wedge q) \to r) \to ((p \to r) \vee (q \to r))$ jest 0 przy v z (1)
(3) $(p \wedge q) \to r$ jest (1) przy v z (2), $(K0 \to)$
(4) $(p \to r) \vee (q \to r)$ jest 0 przy v z (2) $(K0 \to)$
(5) $p \to r$ jest 0 przy v z (4), $(K0\vee)$,
(6) $q \to r$ jest 0 przy v z (4), $(K0\vee)$,
(7) p jest 1 przy v z (5), $(K0 \to)$,
(8) r jest 0 przy v z (5), $(K0 \to)$,
(9) q jest 1 przy v z(6), $(K0 \to)$,
(10) $p \wedge q$ jest 1 przy v z (7),(9), $(W1\wedge)$,

(11) r jest 1 przy v z (3),(10), $(K1 \to (a))$,
absurd (8), (11).

(6) Wykazujemy, że formuła $((p \to r) \vee (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to \sim r)$ nie jest tautologią w taki sposób, jak chcielibyśmy dowieść nie wprost, iż jest ona tautologią. Naszym celem jest wskazanie takiego wartościowania v, przy którym formuła jest fałszywa.

(1) $((p \to r) \vee (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to \sim r)$ nie jest tautologią (założenie)
istnieje wartościowanie v takie, że
(2) $((p \to r) \vee (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to \sim r)$ jest 0 przy v z (1),
(3) $(p \to r) \vee (q \to r)$ jest 1 przy v z (2), $(K0 \to)$,
(4) $(p \wedge q) \to \sim r$ jest 0 przy v z (2), $(K0 \to)$,
(5) $p \wedge q$ jest 1 przy v z (4), $(K0 \to)$,
(6) $\sim r$ jest 0 przy v z (4), $(K0 \to)$,
(7) r jest 1 przy v z (6), $(K0 \sim)$,
(8) p jest 1 przy v z (5), $(K1 \wedge)$,
(9) q jest 1 przy v z (5), $(K1 \wedge)$,

W ten sposób wykazaliśmy, że jeżeli formuła nie jest tautologią, tzn. przy pewnym wartościowaniu v jest fałszywa, to wartościowanie to ma postać: $v(p) = v(q) = v(r) = 1$. Łatwo sprawdzić (przy użyciu tabelek), iż na odwrót, przy tak określonym wartościowaniu v, formuła jest fałszywa.

(7) Wykazujemy nie wprost, że zbiór formuł $\{p \vee \sim q, r \to q, \sim (s \wedge \sim r), s \wedge \sim p\}$ jest sprzeczny.

(1) zbiór $\{p \vee \sim q, r \to q, \sim (s \wedge \sim r), s \wedge \sim p\}$ jest niesprzeczny (założenie),
istnieje wartościowanie v takie, że
(2) $p \vee \sim q$ jest 1 przy v z (1),
(3) $r \to q$ jest 1 przy v z (1),
(4) $\sim (s \wedge \sim r)$ jest 1 przy v z (1),
(5) $s \wedge \sim p$ jest 1 przy v z (1),
(6) $s \wedge \sim r$ jest 0 przy v z (4) $(K1 \sim)$,
(7) s jest 1 przy v z (5), $(K1 \wedge)$,
(8) $\sim p$ jest 1 przy v z (5), $(K1 \wedge)$,
(9) p jest 0 przy v z (8), $(K1 \sim)$,
(10) $\sim q$ jest 1 przy v z (2),(9), $(K1 \vee (b))$,
(11) q jest 0 przy v z (10), $(K1 \sim)$,
(12) r jest 0 przy v z (3),(11), $(K1 \to (b))$,
(13) $\sim r$ jest 0 przy v z (6),(7), $(K0 \wedge (b))$,
(14) r jest 1 przy v z (13), $(K0 \sim)$,
absurd (12), (14).

(8) Wykazujemy, że zbiór formuł $\{p \to q, r \to p, r \to \sim q\}$ jest niesprzeczny w taki sposób, jak chcielibyśmy dowieść nie wprost, że jest on sprzeczny. Naszym celem jest wskazanie takiego wartościowania v, przy którym każda formuła z tego zbioru jest prawdziwa.

(1) $\{p \to q, r \to p, r \to \sim q\}$ jest niesprzeczny (założenie),
istnieje wartościowanie v takie, że
(2) $p \to q$ jest 1 przy v z (1),
(3) $r \to p$ jest 1 przy v z (1),
(4) $r \to \sim q$ jest 1 przy v z (1),
(5) $\sim p \vee q$ jest 1 przy v z (2), ($K1 \to (c)$),

---

(6) $\sim p$ jest 1 przy v (założenie)
(7) p jest 0 przy v z (6), ($K1 \sim$),
(8) r jest 0 przy v z (3),(7), ($K1 \to (b)$),

W ten sposób wykazaliśmy, że jeżeli zbiór formuł jest niesprzeczny, tzn. przy pewnym wartościowaniu v każda formuła z tego zbioru jest prawdziwa, a ponadto spełnione jest założenie (6), to wartościowanie to ma postać: $v(p) = v(r) = 0$, pozostałym zmiennym v przyporządkowuje dowolne wartości ze zbioru $\{0, 1\}$. Łatwo sprawdzić, iż na odwrót, przy tak określonym wartościowaniu v, wszystkie formuły ze zbioru są prawdziwe.

Operatory

Poza zdaniami, nazwami i funktorami, wyróżnia się jeszcze kategorie operatorowe. Aby zdefiniować pojęcie *operatora* zacznijmy od następujących definicji:

Definicje funkcji zdaniowej i nazwowej
Funkcja zdaniowa [*nazwowa*] dla języka naturalnego, to wyrażenie zawierające zmienne określonych typów (np. zmienne przebiegające zdania, bądź zmienne dla nazw indywidualnych, bądź zmienne dla nazw generalnych), które w rezultacie podstawienia w nim w miejsce zmiennych wyrażeń z języka naturalnego odpowiednio tych samych typów co typy tych zmiennych, staje się zdaniem (prawdziwym lub fałszywym) [nazwą].

Na przykład wyrażenie "*x jest człowiekiem*", jest funkcją zdaniową, w której występuje zmienna x dla nazw indywidualnych; wyrażenie "$x + x$" jest funkcją nazwową, w której występuje zmienna dla nazw indywidualnych; wyrażenie "*każde S jest M*" jest funkcją zdaniową, w której S, M są zmiennymi dla nazw generalnych; wyrażenie "A *i* B" jest funkcją zdaniową, w której A, B są zmiennymi dla zdań.

Wyrażenie: "*dla każdego x, jeżeli x jest człowiekiem, to x jest śmiertelny*", nie jest funkcją zdaniową, jeśli x jest zmienną dla nazw indywidualnych. Jest ono zdaniem. Wyrażenie: "$\{x : x$ jest liczbą rzeczywistą i $x + 2 > 4\}$", mimo, że występuje w nim zmienna (dla nazw indywidualnych) nie jest funkcją nazwową, lecz jest nazwą (zbioru). Podobnie wyrażenie "$\int x dx$" nie jest funkcją nazwową, lecz jest nazwą (funkcji).

Wyrażenia takie jak: "*dla każdego x*", "$\{x : \ \}$", "$\int \ dx$" również nie są ani funkcjami zdaniowymi, ani nazwowymi, choć występują w nich zmienne. Wyrażenia te nie są jednak ani zdaniami, ani nazwami, ani funktorami. Nazywane są *operatorami.*

Definicja operatora

Operator jest to wyrażenie zawierające zmienną, które po dołączeniu do funkcji zdaniowej bądź nazwowej, w której ta zmienna występuje, tworzy wraz z nią zdanie bądź nazwę.

Niektóre typy syntaktyczne operatorów:

$\frac{z}{|z}$ jest wskaźnikiem kategorii operatorów zdaniotwórczych, których argumentem jest funkcja zdaniowa,

$\frac{n}{|n}$ jest wskaźnikiem kategorii operatorów nazwotwórczych, których argumentem jest funkcja nazwowa,

$\frac{n}{|z}$ jest wskaźnikiem kategorii operatorów nazwotwórczych, których argumentem jest funkcja zdaniowa.

Przykłady.
dla każdego x, *dla pewnego* x: $\frac{z}{|z}$,
$\int\ dx$: $\frac{n}{|n}$,
$\{x:\ \}$: $\frac{n}{|z}$.

Język logiki kwantyfikatorów

Słownik:
zmienne nazwowe: $x_1, x_2, \ldots$,
spójniki: $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$,
kwantyfikatory:
duży, ogólny lub uniwersalny: $\forall$ (dla każdego),
mały, szczegółowy lub egzystencjalny: $\exists$ (dla pewnego)
predykat identyczności: $=$, (2-argumentowy)
stałe nazwowe: $c_1, c_2, \ldots, c_k,\ k \geq 0$
predykaty: $P_1, P_2, \ldots, P_n,\ n \geq 0$ (1- i 2-argumentowe)
nawiasy i przecinek: (,) , .

Definicja termu nazwowego

Dowolną zmienną lub stałą nazwową nazywamy *termem (nazwowym).*

Dysponując definicją termu można sformułować

Definicję zbioru formuł

(1) Jeżeli t, s są termami, to ciąg symboli: $t = s$ jest formułą.

(2) Jeżeli t jest termem oraz P jest 1-argumentowym predykatem, to ciąg $P(t)$ jest formułą.

(3) Jeżeli t, s są termami oraz P jest 2-argumentowym predykatem, to ciąg: $P(t, s)$ jest formułą.

(4) Jeżeli α jest formułą, to $\sim \alpha$ jest formułą.

(5) Jeżeli α, β są formułami, to ciągi: $(\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ są formułami.

(6) Jeżeli x jest zmienną nazwową oraz α jest formułą, to ciągi: $\forall x\alpha$, $\exists x\alpha$ są formułami.

(7) Jeżeli ciąg symboli α jest formułą, to α jest jednej z postaci podanych w warunkach (1) - (6).

Formuły, których postacie zostały wymienione w (1), (2), (3) nazywane są *formułami atomowymi*.

Definicje

Mówimy, że w formule $\forall x\alpha$ kwantyfikator $\forall$ *wiąże* zmienną x, zaś formułę α nazywamy *zasięgiem* tego kwantyfikatora. Analogicznie dla formuły $\exists x\alpha$.

Każde pojawienie się nie bezpośrednio po kwantyfikatorze danej zmiennej x w danej formule α nazywamy *występowaniem* zmiennej x w α.

Występowanie zmiennej x w formule β nazywamy *wolnym*, gdy nie jest ono w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego tę zmienną.

Mówimy, że zmienna x jest *wolna* w formule β, gdy zmienna ta ma w tej formule przynajmniej jedno wolne występowanie.

Formułę nazywamy *domkniętą* (lub *zdaniem*), gdy nie występuje w niej zmienna wolna.

Przykład. W formule: $\forall x P_1(x, y) \wedge P_2(x)$, zmienne x, y są wolne, natomiast w formule $\forall x P_1(x, y)$ tylko zmienna y jest wolna. Formuła $\exists y \forall x P_1(x, y)$ jest zdaniem.

Zasady zapisu schematów w języku logiki kwantyfikatorów dla zdań z języka naturalnego

Niech A będzie dowolnym zdaniem oznajmującym z języka polskiego. Naszym celem jest zapisanie formuły domkniętej w języku logiki kwantyfikatorów, ukazującej "strukturę logiczną" zdania A, nazywanej z tego powodu, schematem zdania A.

1) Każdej nazwie indywidualnej występującej w zdaniu A odpowiada w jego schemacie stała nazwowa (różnym nazwom odpowiadają różne stałe).
2) Żadna nazwa generalna S występująca w zdaniu A nie ma odpowiednika w jego schemacie, lecz 1-argumentowemu predykatowi postaci *jest* S, powstałemu przez dołączenie do nazwy S wyrażenia *jest*, odpowiada w schemacie zdania A 1-argumentowy predykat ze słownika języka logiki kwantyfikatorów.

3) Każdemu 1- i 2-argumentowemu predykatowi występującemu w zdaniu A odpowiada w schemacie tego zdania odpowiednio 1- bądź 2-argumentowy predykat ze słownika (różnym predykatom z języka polskiego odpowiadają różne predykaty ze słownika)

4) Jeżeli w A występują kwantyfikatory (*każdy, żaden, wszystkie, pewne, niektóre*, to dokonujemy jego rozkładu na główny kwantyfikator i funkcję zdaniową, która jest jego argumentem, następnie rozkładamy tę funkcję zdaniową na jej główny kwantyfikator i jego argument itd., aż oznaczymy wszystkie funkcje zdaniowe, w których już nie występuje kwantyfikator.

5) Funkcjom zdaniowym, w których nie występują kwantyfikatory, otrzymanym według zasady 4), odpowiadają w schemacie zdania A, formuły atomowe.

Przykłady. Schematami zdań: *Jaś kocha Małgosię, Małgosia kocha Jasia* są odpowiednio formuły atomowe: $K(j, m)$, $K(m, j)$, gdzie K jest predykatem ze słownika odpowiadającym predykatowi *kocha* oraz j, m są stałymi nazwowymi odpowiadającymi odpowiednio nazwom indywidualnym *Jaś, Małgosia.*

Schematami zdań *Jaś kocha wszystkich ludzi, Jaś kogoś kocha*, są odpowiednio formuły: $\forall x(C(x) \to K(j, x))$, $\exists x(C(x) \wedge K(j, x))$, gdzie C jest predykatem ze słownika odpowiadającym predykatowi: *jest człowiekiem.*

Semantyka dla języka I rzędu (kwantyfikatorowego

Naszym celem jest obecnie zdefiniowanie dwóch pojęć: *interpretacji* języka kwantyfikatorowego oraz *prawdziwości*, względnie *fałszywości* zdania w danej interpretacji. Dysponując pojęciem prawdziwości zdania w danej interpretacji można będzie wprowadzić centralne pojęcie wynikania logicznego, a następnie tautologii oraz sprzecznego zbioru zdań.

Definicje

Niech D będzie dowolnym niepustym zbiorem (klasą, mnogością) obiektów.

Przypominany, że dowolny zbiór, którego każdy element należy do zbioru D nazywamy *podzbiorem* zbioru D.

Dowolny zbiór dwuwyrazowych ciągów elementów zbioru D nazywamy *relacją binarną* na zbiorze D.

Na formalną semantykę dla języka kwantyfikatorowego składają się jego *interpretacje*:

Definicja interpretacji

Przez interpretację języka I rzędu wyznaczonego przez stałe nazwowe: $c_1, \ldots,$ c_k, oraz predykaty $P_1, \ldots, P_n$, rozumiemy następujący układ:

$\mathcal{I} = (D, c_1^*, \ldots, c_k^*, P_1^*, \ldots, P_n^*)$, gdzie

(1) D jest dowolnym niepustym zbiorem, zwanym *dziedziną* interpretacji,

(2) dla każdego $j = 1, \ldots, k :$ $c_j^* \in D$ jest wyróżnionym elementem zbioru D (którego nazwą w definiowanej interpretacji jest stała c_j),

(3) dla każdego $j = 1, \ldots, n :$ P_j^* jest albo podzbiorem zbioru D, gdy nazywający go predykat P_j jest 1-argumentowy, albo jest relacją binarną na zbiorze D, gdy P_j jest 2-argumentowy.

Aby zdefiniować pojęcie *prawdziwości formuły domkniętej w interpretacji* $\mathcal{I}$ rozszerzamy przy ustalonej interpretacji $\mathcal{I}$ zbiór stałych nazwowych $\{c_1, \ldots, c_k\}$ o nowe stałe $a_d,\ d \in D$. W ten sposób dla danej interpretacji $\mathcal{I}$ ulega rozszerzeniu zbiór formuł tego języka I rzędu, którego $\mathcal{I}$ jest interpretacją, w szczególności jego zbiór zdań. Będziemy definiować prawdziwość w interpretacji $\mathcal{I}$ dla zdań z tego szerszego zbioru.

Każda interpretacja wyznacza tzw. *waluację* termów domkniętych, czyli przyporządkowanie każdemu termowi domkniętemu pewnego elementu z dziedziny tej interpretacji (nieformalnie: elementu nazywanego tym termem w tej interpretacji), jak następuje:
(a) $|c_j| = c_j^*,\ j = 1, \ldots, k,$

(b) $|a_d| = d,\ d \in D.$

Definicja prawdziwości formuły domkniętej w interpretacji $\mathcal{I}$
Dla dowolnych stałych a, b rozszerzonego języka oraz dowolnych 1-argumentowego predykatu P i 2-argumentowego predykatu Q:

(1) $a = b$ jest prawdziwa w $\mathcal{I}$ wtw $|a|, |b|$ są jednym i tym samym obiektem,

(2) $P(a)$ jest prawdziwa w $\mathcal{I}$ wtw $|a| \in P^*$,

(3) $Q(a, b)$ jest prawdziwa w $\mathcal{I}$ wtw $(|a|, |b|) \in Q^*$,

dla dowolnych formuł domkniętych α, β:

(4) $\sim \alpha$ jest prawdziwa w $\mathcal{I}$ wtw α nie jest prawdziwa w $\mathcal{I}$,

(5) $\alpha \wedge \beta$ jest prawdziwa w $\mathcal{I}$ wtw obie formuły: α, β, są prawdziwe w $\mathcal{I}$,

(6) $\alpha \vee \beta$ jest prawdziwa w $\mathcal{I}$ wtw przynajmniej jedna z formuł: α, β, jest prawdziwa w $\mathcal{I}$,

(7) $\alpha \to \beta$ jest prawdziwa w $\mathcal{I}$ wtw α nie jest prawdziwa w $\mathcal{I}$ lub β jest prawdziwa w $\mathcal{I}$,

(8) $\alpha \leftrightarrow \beta$ jest prawdziwa w $\mathcal{I}$ wtw obie formuły: α, β, są prawdziwe w $\mathcal{I}$, bądź obie te formuły nie są prawdziwe w $\mathcal{I}$

dla dowolnej formuły α z co najwyżej jedną zmienną wolną, którą jest zmienna x:
(9) $\forall x \alpha$ jest prawdziwa w $\mathcal{I}$ wtw dla każdego elementu $d \in D$: formuła $\alpha[x/a_d]$ jest prawdziwa w $\mathcal{I}$,

(10) $\exists x \alpha$ jest prawdziwa w $\mathcal{I}$ wtw dla pewnego elementu $d \in D$: formuła $\alpha[x/a_d]$ jest prawdziwa w $\mathcal{I}$,
gdzie $\alpha[x/a_d]$ jest formułą uzyskaną z formuły α przez zastąpienie w niej każdego wolnego występowania zmiennej x stałą a_d.

Na podstawie definicji prawdziwości formuł ogólnych i szczegółowych w danej interpretacji, można sformułować następujące reguły (sposoby) korzystania z informacji o prawdziwości lub fałszywości w danej interpretacji tych formuł:

$(K1\forall)$	$(K0\exists)$
$\forall x\alpha$ jest 1 w $\mathcal{I}$	$\exists x\alpha$ jest 0 w $\mathcal{I}$
$\alpha[x/a]$ jest 1 w $\mathcal{I}$	$\alpha[x/a]$ jest 0 w $\mathcal{I}$

gdzie a jest dowolną stałą nazwową spośród $c_1, \ldots, c_k$, bądź stałych $a_d, d \in D$

$(K0\forall)$	$(K1\exists)$
$\forall x\alpha$ jest 0 w $\mathcal{I}$	$\exists x\alpha$ jest 1 w $\mathcal{I}$
$\alpha[x/a]$ jest 0 w $\mathcal{I}$ dla pewnego a	$\alpha[x/a]$ jest 1 w $\mathcal{I}$ dla pewnego a

a jest tu niewyspecyfikowaną stałą nazwową spośród stałych $a_d, d \in D$ i taką, która wcześniej w dowodzie nie pojawiła się

Sposoby wykazywania prawdziwości lub fałszywości w danej interpretacji formuł ogólnych i szczegółowych:

$(W1\forall)$	$(W0\exists)$
rozważmy dowolne a	rozważmy dowolne a
wykaż: $\alpha[x/a]$ jest 1 w $\mathcal{I}$	wykaż: $\alpha[x/a]$ jest 0 w $\mathcal{I}$
cel: $\forall x\alpha$ jest 1 w $\mathcal{I}$	cel: $\exists x\alpha$ jest 0 w $\mathcal{I}$

a jest tu dowolną niewyspecyfikowaną stałą nazwową (tzn. nie wiemy jaki obiekt z dziedziny interpretacji $\mathcal{I}$ jest przez nią nazywany) spośród stałych $a_d, d \in D$

$(W0\forall)$	$(W1\exists)$
wykaż: $\alpha[x/a]$ jest 0 w $\mathcal{I}$	wykaż: $\alpha[x/a]$ jest 1 w $\mathcal{I}$
cel: $\forall x\alpha$ jest 0 w $\mathcal{I}$	cel: $\exists x\alpha$ jest 1 w $\mathcal{I}$

a jest tu jakąkolwiek stałą nazwową spośród $c_1, \ldots, c_k$, bądź stałych $a_d, d \in D$

Wynikanie loguiczne, tautologia, sprzeczny zbiór zdań w logice kwantyfikatorów

Centralnym pojęciem semantycznym jest tu *wynikanie logiczne* lub inaczej *relacja konsekwencji logicznej.*

Definicja wynikania logicznego

Mówimy, że zdanie α *wynika logicznie* ze zbioru zdań Z ustalonego języka kwantyfikatorowego ($Z \models \alpha$), gdy α jest prawdziwe w każdej interpretacji, w której prawdziwe jest każde zdanie ze zbioru Z.

Przykłady (1) Zdanie $\exists x Q(x, c)$ wynika logicznie ze zbioru zdań: $\{\exists x \forall y (P(y, x) \to Q(x, y)), \forall x P(c, x)\}$.

Rozważmy bowiem dowolną interpretację $\mathcal{I} = (D, c^*, P^*, Q^*)$ i załóżmy, że

(1) $\exists x \forall y (P(y, x) \to Q(x, y))$ jest 1 w $\mathcal{I}$,
(2) $\forall x P(c, x)$ jest 1 w $\mathcal{I}$,

Wówczas:

(3) $\forall y (P(y, a) \to Q(a, y))$ jest 1 w $\mathcal{I}$ dla pewnej stałej a z (1), $(K1\exists)$,
(4) $P(c, a) \to Q(a, c)$ jest 1 w $\mathcal{I}$ z (3), $(K1\forall)$,
(5) $P(c, a)$ jest 1 w $\mathcal{I}$ z (2), $(K1\forall)$,
(6) $Q(a, c)$ jest 1 w $\mathcal{I}$ z (4),(5), $(K1 \to)(a)$,
$\exists x Q(x, c)$ jest 1 w $\mathcal{I}$ z (6), $(W1\exists)$.

(2) Zdanie (1) $\exists x (P_1(x) \wedge \sim Q(x, x))$ nie wynika logicznie ze zbioru zdań: $\{(2)\ \exists x (P_2(x) \wedge \forall y (P_1(y) \to \sim Q(x, y))),\ (3)\ \forall x (P_1(x) \to P_2(x))\}$.

Aby to wykazać, należy wskazać taką interpretację $\mathcal{I} = (D, P_1^*, P_2^*, Q^*)$, w której zdania (2), (3) są prawdziwe, natomiast zdanie (1) jest fałszywe. Połóżmy:

D = zbiór liczb naturalnych N,
P_1^* = zbiór liczb naturalnych parzystych,
$P_2^* = N,\ Q^* = \{(i, i) : i \in N\}$ (relacja identyczności na N).

W $\mathcal{I}$ zdanie (1) jest fałszywe: nie istnieje liczba naturalna, która jest parzysta i różna od siebie samej. Ponieważ np. liczba 1 jest naturalna i każda liczba parzysta naturalna jest od niej różna, więc prawdziwe w $\mathcal{I}$ jest zdanie (2). Oczywiście każda liczba naturalna parzysta jest liczbą naturalną, dlatego prawdziwe w $\mathcal{I}$ jest zdanie (3).

Definicja tautologii

Zdanie α danego języka I rzędu nazywamy *tautologią*, gdy α jest prawdziwe w każdej interpretacji dla tego języka.

Przykłady (1) Zdanie: $\exists x \forall y Q(x, y) \to \forall y \exists x Q(x, y)$, jest tautologią.

Rozważmy bowiem dowolną interpretację $\mathcal{I} = (D, Q^*)$. Naszym celem jest wykazanie prawdziwości tego zdania w $\mathcal{I}$. Na podstawie $(W1 \to)(a)$ załóżmy, że

(1) $\exists x \forall y Q(x, y)$ jest 1 w $\mathcal{I}$.

Na mocy $(W1\forall)$ niech a będzie stałą nazywającą dowolnie wybrany obiekt z dziedziny D. Wówczas:

(2) $\forall y Q(b, y)$ jest prawdziwa w $\mathcal{I}$ dla pewnej stałej b z (1), $(K1\exists)$,
(3) $Q(b, a)$ jest 1 w $\mathcal{I}$ z (2) $(K1\forall)$,
$\exists x Q(x, a)$ jest 1 w $\mathcal{I}$ z (3), $(W1\exists)$,

co, na mocy $(W1\forall)$, dowodzi prawdziwości zdania: $\forall y \exists x Q(x, y)$. Zatem, według $(W1 \to (a))$, nasze zdanie jest prawdziwe w $\mathcal{I}$.

(2) Implikacja: $\forall y \exists x Q(x, y) \to \exists x \forall y Q(x, y)$ nie jest tautologią.

Aby to wykazać, należy wskazać taką interpretację $\mathcal{I} = (D, Q^*)$, w której zdanie to jest fałszywe. Niech więc np.

$D = N$ oraz
$Q^* = \{(i, j) : i, j \in N : i \geq j\}$.

W tej interpretacji poprzednik: $\forall y \exists x Q(x, y)$ jest prawdziwy, lecz następnik: $\exists x \forall y Q(x, y)$ jest fałszywy. Zatem nasza implikacja jest w tej interpretacji fałszywa.

Definicja sprzecznego zbioru zdań

Zbiór zdań X nazywamy *niesprzecznym*, gdy istnieje interpretacja, w której każde zdanie z X jest prawdziwe. Zbiór zdań jest *sprzeczny*, gdy nie jest on niesprzeczny.

Przykłady (1) Zbiór zdań:
$\{\forall x \forall y((P_1(x) \wedge P_2(y)) \to Q(x, y)),\ \exists x(P_1(x) \wedge P_2(x)),\ \forall x(P_1(x) \to \sim Q(x, x))\}$,
jest sprzeczny.

Aby tego dowieść, załóżmy nie wprost, że jest niesprzeczny. Wówczas istnieje interpretacja $\mathcal{I} = (D, P_1^*, P_2^*, Q^*)$, w której prawdziwe są formuły:

(1) $\forall x \forall y((P_1(x) \wedge P_2(y)) \to Q(x, y))$,
(2) $\exists x(P_1(x) \wedge P_2(x))$,
(3) $\forall x(P_1(x) \to \sim Q(x, x))$.

Zatem

(4) $P_1(a) \wedge P_2(a)$ jest 1 w $\mathcal{I}$ dla pewnego a z (2), $(K1\exists)$,
(5) $\forall y((P_1(a) \wedge P_2(y)) \to Q(a, y))$ jest 1 w $\mathcal{I}$ z (1), $(K1\forall)$,
(6) $(P_1(a) \wedge P_2(a)) \to Q(a, a)$ jest 1 w $\mathcal{I}$ z (5), $(K1\forall)$,
(7) $Q(a, a)$ jest 1 w $\mathcal{I}$ z (6), (4), $(K1 \to)(a)$,
(8) $P_1(a)$ jest 1 w $\mathcal{I}$ z (4), $(K1\wedge)$,
(9) $P_1(a) \to \sim Q(a, a)$ jest 1 w $\mathcal{I}$ z (3), $(K1\forall)$,
(10) $\sim Q(a, a)$ jest 1 w $\mathcal{I}$ z (9), (8), $(K1 \to (a))$,
(11) $Q(a, a)$ jest 0 w $\mathcal{I}$ z (10), $(K1 \sim)$,
absurd (11), (7).

(2) Zbiór zdań: $\{\forall x(Q(c, x) \to Q(x, c)), \sim Q(c, c)\}$ jest niesprzeczny.

Aby to wykazać, wystarcza wskazać jakąkolwiek interpretację, w której każda formuła z tego zbioru jest prawdziwa. Np. niech dziedziną interpretacji będzie jakikolwiek niepusty zbiór D oraz niech

$Q^* = \{(u, v) : u, v \in D, u \neq v\}$.

Pojęcie klasyfikacji

Przypominamy, iż przez *relację binarną określoną na danym zbiorze* A rozumiemy dowolny (w tym również *pusty*) zbiór 2-wyrazowych ciągów elementów zbioru A. Zbiór wszystkich 2-wyrazowych ciągów elementów zbioru A nazywamy relacją *pełną* na A i oznaczamy A^2.

Niech R będzie dowolną relacją binarną określoną na ustalonym zbiorze A. Zamiast pisać: "ciąg (x, y) elementów zbioru A jest elementem relacji R" piszemy: "xRy".

Definicja najważniejszych formalnych własności relacji binarnych określonych na danym zbiorze

Mówimy, że

R jest zwrotna na A wtw dla dowolnego elementu x zbioru A zachodzi xRx,

R jest przeciwzwrotna na A wtw dla żadnego elementu x zbioru A nie zachodzi: xRx,

R jest symetryczna na A wtw dla dowolnych elementów x, y zbioru A (niekoniecznie różnych), jeżeli xRy, to yRx,

R jest przeciwsymetryczna na A wtw dla dowolnych elementów x, y zbioru A, jeżeli xRy, to nie zachodzi yRx,

R jest antysymetryczna na A wtw dla dowolnych elementów x, y zbioru A, jeżeli xRy oraz yRx, to $x = y$,

R jest przechodnia na A wtw dla dowolnych elementów x, y, z zbioru A, jeżeli xRy oraz yRz, to xRz,

R jest spójna na A wtw dla dowolnych elementów x, y zbioru A, jeżeli $x \neq y$, to xRy lub yRx.

Jeden z najważniejszych typów relacji binarnych określonych na danym zbiorze stanowią *relacje równoważnościowe.*

Definicja relacji równoważności

Mówimy, że *R jest równoważnościowa* lub że jest relacją *równoważności* na zbiorze A, gdy R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia na A.

Przykłady (1) Relacja pełna A^2 oraz tzw. relacja *identycznościowa* $id(A)$ określona na A następująco: dla dowolnych elementów x, y zbioru A,

$x(id(A))y$ wtw $x = y$,

są relacjami równoważności na zbiorze A.

(2) Na zbiorze trójelementowym $A = \{a, b, c\}$ mamy pięć relacji równoważności:

$id(A) = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$,

$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$,

$R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$,

$R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}$,

$A^2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}$.

Definicja klasy abstrakcji względem danej relacji równoważności

Dla dowolnej relacji równoważności R określonej na danym zbiorze A oraz dowolnego elementu a zbioru A, zbiór wszystkich elementów x zbioru A takich, że aRx nazywamy *klasą abstrakcji* bądź *reprezentacji* elementu a względem relacji R i oznaczamy w postaci: $[a]_R$.

Przykłady (1) Dla dowolnego elementu a danego zbioru A, $[a]_{id(A)} = \{a\}$ oraz $[a]_{A^2} = A$,

(2) Dla relacji równoważności R_1, R_2, R_3 z poprzedniego przykładu, określonych na zbiorze $\{a,b,c\}$ mamy:

$[a]_{R_1} = \{a,b\},\ [b]_{R_1} = \{a,b\} = [a]_{R_1},\ [c]_{R_1} = \{c\}$,

$[a]_{R_2} = \{a,c\},\ [b]_{R_2} = \{b\},\ [c]_{R_2} = \{a,c\} = [a]_{R_2}$,

$[a]_{R_3} = \{a\},\ [b]_{R_3} = \{b,c\},\ [c]_{R_3} = \{b,c\} = [b]_{R_3}$.

Niech R będzie relacją równoważności na A. Ponieważ dla dowolnego elementu a zbioru A zachodzi: aRa, więc a jest elementem swojej klasy abstrakcji, zatem

dowolna klasa abstrakcji jest niepustym zbiorem.

Interesujące dla zastosowań są kolejne dwie własności klas abstrakcji:

Druga istotna własność klas abstrakcji ma postać:

dla dowolnych elementów x, y zbioru A: xRy wtw $[x] = [y]$.

Dowód: ($\Rightarrow$): Załóżmy, że xRy. Aby wykazać równość zbiorów dowodzimy, iż mają one te same elementy. Niech więc a będzie elementem klasy abstrakcji $[x]$. Zatem xRa. Ponieważ z założenia na mocy symetrii relacji R mamy: yRx, więc w konsekwencji na podstawie przechodniości R otrzymujemy: yRa, co oznacza, iż a jest elementem zbioru $[y]$. W ten sposób wykazaliśmy, że każdy element zbioru $[x]$ jest elementem zbioru $[y]$. Na odwrót przypuśćmy, iż a jest elementem klasy abstrakcji $[y]$. Zatem yRa. Stąd na mocy założenia i przechodniości relacji R mamy: xRa, dlatego a jest elementem zbioru $[x]$.

($\Leftarrow$): Załóżmy, że $[x] = [y]$. Ponieważ y jest elementem klasy abstrakcji $[y]$, więc na mocy założenia otrzymujemy: y jest elementem zbioru $[x]$, zatem xRy.

Trzecia własność klas abstrakcji:

dla dowolnych elementów x, y zbioru A: jeżeli klasy abstrakcji $[x], [y]$ nie są rozłączne, to są równe.

Dowód: Załóżmy, że a jest elementem obu klas abstrakcji $[x], [y]$. Wówczas xRa oraz yRa. Zatem z symetrii relacji R mamy: aRy, co z przechodniości relacji R implikuje: xRy i w konsekwencji na mocy drugiej własności klas abstrakcji otrzymujemy: $[x] = [y]$.

Definicja podziału danego zbioru

Przez *podział* danego zbioru A rozumiemy dowolny zbiór Π niepustych podzbiorów zbioru A spełniający następujące dwa warunki:

(1) dowolne dwa różne elementy zbioru Π są rozłączne,

(2) dla każdego elementu a zbioru A istnieje element X zbioru Π taki że a należy do X.

Przykłady (1) Zbiór 1-elementowy $\{A\}$ jest podziałem zbioru A.

(2) Zbiór złożony ze wszystkich jednoelementowych podzbiorów $\{a\}$ dowolnego zbioru A jest podziałem zbioru A.

(3) Istnieje pięć podziałów trójelementowego zbioru $A = \{a, b, c\}$:

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$,

$\{\{a, b\}, \{c\}\}$,

$\{\{a, c\}, \{b\}\}$,

$\{\{b, c\}, \{a\}\}$,

$\{\{a, b, c\}\}$.

Jednym z podstawowych twierdzeń dotyczących podziałów jest

Zasada abstrakcji

Dla dowolnej relacji równoważności R określonej na zbiorze A zbiór wszystkich klas abstrakcji elementów zbioru A względem relacji R jest podziałem tego zbioru.

Dowód: Zauważmy najpierw, iż dowolna klasa abstrakcji $[x]$ względem R jest niepustym podzbiorem zbioru A (pierwsza własność klas abstrakcji). Po drugie, na mocy trzeciej własności klas abstrakcji zachodzi warunek (1) definicji podziału dla zbioru wszystkich klas abstrakcji względem R. Warunek (2) tej definicji jest spełniony, bo dowolny element a zbioru A jest elementem klasy abstrakcji $[a]$.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnego podziału Π zbioru A relacja R określona na A następująco: dla dowolnych elementów x, y zbioru A : xRy wtw istnieje element X podziału Π taki, że x, y są elementami X, jest relacją równoważności na zbiorze A.*

Dowód: Zwrotność relacji R wynika z warunku (2) definicji podziału, symetria wprost z określenia relacji R, natomiast jej przechodniość jest konsekwencją warunku (1) definicji podziału: przypuśćmy bowiem, że xRy oraz yRz. Zatem x, y są elementami pewnego zbioru X należącego do Π oraz y, z są elementami pewnego zbioru Y należącego do podziału Π. Stąd X, Y nie są rozłączne. Zatem, według warunku (1) definicji podziału: $X = Y$. Dlatego x, z są elementami tej samej części podziału Π. Na mocy definicji relacji R otrzymujemy ostatecznie: xRz.

Na mocy zasady abstrakcji, każda relacja równoważności określona na danym zbiorze wyznacza podział tego zbioru. Natomiast zgodnie z Tw.1, dowolny podział danego zbioru wyznacza relację równoważności określoną na tym zbiorze. Można wykazać nieco więcej: relacja równoważności wyznaczona przez podział, który sam wyznaczony jest przez daną relację równoważności, jest tożsama z tą daną relacją. Ponadto, podział wyznaczony przez relację równoważności, która sama jest wyznaczona przez dany podział, jest tożsamy z tym danym podziałem.

Przykład. Przyporządkowanie: relacja równoważności $\longleftrightarrow$ podział, dla zbioru $A = \{a, b, c\}$ przedstawia się następująco:

$$\{(a, a), (b, b), (c, c)\} \longleftrightarrow \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}\ ,$$

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\} \longleftrightarrow \{\{a, b\}, \{c\}\},$$

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\} \longleftrightarrow \{\{a, c\}, \{b\}\},$$

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\} \longleftrightarrow \{\{b, c\}, \{a\}\},$$

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\} \longleftrightarrow \{\{a, b, c\}\}.$$

Definicja relacji bycia drobniejszym

Niech Π, Σ będą dowolnymi podziałami danego zbioru A. Mówimy, że podział Π jest *drobniejszy niż* podział Σ, gdy dla każdego elementu X podziału Π istnieje element Y podziału Σ taki, że X jest podzbiorem zbioru Y.

Własności formalne relacji bycia drobniejszym podaje następujące

Twierdzenie 2. *Relacja bycia drobniejszym, tzn relacja dr określona na zbiorze wszystkich podziałów zbioru A następująco:* $\Pi dr \Sigma$ *wtw* Π *jest drobniejszy niż* Σ*, jest relacją zwrotną, antysymetryczną i przechodnią.*

Dowód: Oczywiście dla dowolnego podziału Π danego zbioru $A:\ \Pi dr \Pi$, bowiem dla każdego elementu X podziału $\Pi:\ X$ jest podzbiorem X.

W celu wykazania przechodniości przypuśćmy, że (1) $\Pi dr \Sigma$ oraz (2) $\Sigma dr \Theta$ dla jakichś podziałów Π, Σ, Θ zbioru A. Aby wykazać, że $\Pi dr \Theta$ załóżmy, że X jest elementem podziału Π. Wówczas z założenia (1) istnieje taki element Y podziału Σ, że X jest jego podzbiorem. Analogicznie, na mocy założenia (2) istnieje element Z podziału Θ taki, że Y jest podzbiorem Z. Zatem X jest podzbiorem Z (bo relacja bycia podzbiorem jest przechodnia), co dowodzi, iż $\Pi dr \Theta$. Aby dowieść antysymetrii relacji *dr* załóżmy, że (3) $\Pi dr \Sigma$ oraz (4) $\Sigma dr \Pi$. Celem jest wykazanie równości: $\Pi = \Sigma$, tzn. tego, że podziały Π, Σ mają te same elementy. Niech więc X będzie elementem podziału Π. Wówczas z założenia (3) istnieje element Y podziału Σ taki, że (5) X jest podzbiorem Y. Z założenia (4) istnieje element Z podziału Π taki, że (6) Y jest podzbiorem Z. Wobec tego z (5) i (6) mamy: X jest podzbiorem Z, a ponieważ X jest niepusty, więc elementy X, Z podziału Π nie są rozłączne. Zatem $X = Z$ na mocy warunku (1) definicji podziału. Oznacza to wraz z (6), że Y jest podzbiorem X. Stąd i z (5) wnosimy, że zbiory X, Y mają te same elementy, tzn. , że $X = Y$. Lecz

Y to element podziału Σ, Zatem X jest elementem podziału Σ. W ten sposób wykazano, że każdy element podziału Π jest elementem podziału Σ. Należy jeszcze dowieść, że każdy element podziału Σ jest elementem podziału Π, co czyni się analogicznie.

Definicja klasyfikacji

Przez *klasyfikację* zbioru A rozumie się dowolny niepusty zbiór podziałów zbioru A taki, że dla dowolnych podziałów Π, Σ z tego zbioru, Π jest drobniejszy niż Σ lub Σ jest drobniejszy niż Π.

Przykład. Zbiór podziałów: $\{\{a, b, c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ zbioru $A = \{a, b, c\}$ jest klasyfikacją tego zbioru.